

8. Заключительные комментарии по двумерному Изингу

В предыдущих разделах мы изучили двумерную модель Изинга в нулевом магнитном поле. Повторим основные результаты из лекций и упражнений.

- Мы изучили некоторые методы нахождения статистической суммы и других физически важных объектов.
- Свободная энергия в термодинамическом пределе и показатель α . Двумя разными способами - с помощью метода функциональных уравнений и фермионизации мы нашли статистическую сумму, а также свободную энергию в термодинамическом пределе.

$$F = -kT \left(\log(2 \sinh 2L)^{1/2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_q dq \right).$$

где

$$\cosh \varepsilon_q = \cosh 2L^* \cosh 2K - \sinh 2L^* \sinh 2K \cos q.$$

Для простоты, рассмотрим случай $L = K$ и $t = (T - T_c)/T_c \sim L - L^*$. Тогда вблизи критической точки свободная энергия имеет вид

$$F = t^2 \log t + \dots.$$

Здесь многоточием представлены несингулярные при $t \rightarrow 0$ члены. Представляя логарифм как

$$\log t = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - t^{-z}}{z},$$

мы видим, что показатель теплоемкости α равен 0.

- Одноточечная функция. Также, мы определили в методе угловой трансфер матрицы (и, не до конца) в методе свободных фермионов, одноточечный коррелятор, т.е. намагниченность на узел решетки.

$$\langle \sigma \rangle = \left(1 - \frac{(1 - \tanh^2 K)^2 (1 - \tanh^2 L)^2}{16 \tanh^2 K \tanh^2 L} \right)^{\frac{1}{8}} = (1 - k^2)^{\frac{1}{8}}.$$

Это выражение, после простого анализа дает нам для намагниченности

$$M \sim (-t)^{\frac{1}{8}}$$

значение $\beta = \frac{1}{8}$.

- Мы также рассмотрели процедуру нахождения двухточечных корреляционных функции на решетке.

$$\langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle.$$

Хотя мы не проводили анализ скейлинговых свойств корреляторов, заметим, что вблизи критической точки

$$\langle (\sigma_j - \langle \sigma \rangle) (\sigma_{j'} - \langle \sigma \rangle) \rangle = \frac{G(\frac{j'-j}{\xi})}{|j' - j|^{\frac{1}{8}}},$$

что соответствует показателю $\beta = 1/8$. Можно найти, что показатель корреляционной длины $\nu = 1$.

Заметим, что последнее свойство также следует из факта, что низколежащие одночастичные возбуждения, задаваемыми фермионными операторами, имеют массу $m = (L - L^*) \sinh 2L$.

В силу дуальности Краммера-Ванье, корреляторы операторов беспорядка μ имеют похожие свойства. Впрочем, используя явные выражения вида

$$\mu_{j-1/2} = \prod_1^{j-1} \sigma_x,$$

можно найти корреляторы этих операторов непосредственно. Корреляторы фермионных операторов, соответствующие произведению операторов порядка и оператора беспорядка

$$C_j = \mu_{j-1/2} \sigma_j,$$

легко вычисляются на решетке. Также, на решетке можно ввести другие составные операторы - оператор плотности энергии, оператор тензора напряженности, для которых также возможно проанализировать корреляторы. Анализ корреляторов этих операторов в непрерывном пределе в окрестности критической точки дает, что

$$\sigma \sim r^{-\frac{1}{8}}, \mu \sim r^{-\frac{1}{8}}, C \sim r^{-\frac{1}{2}}.$$

Отдельный и важный вопрос - операторная алгебра полей вблизи критической точки, рассматривается в курсе конформной теории поля.

Завершая рассмотрение модели Изинга, отметим, что существует много методов анализа подобных спиновых систем. Специфика двумерной модели Изинга, ее простота во многом в том, что в ее основе лежит алгебра свободных фермионов, которые диагонализуют квадратичный по фермионам Гамильтониан и нарождают пространство состояний модели. В дальнейшем мы рассмотрим более сложные, но тем не менее точно-решаемые модели.

Мы не рассмотрели многие важные аспекты модели Изинга. В частности, интересным и важным является метод SLE для анализа модели Изинга, позволяющий вычислять строго показатели. Мы не изучали граничные эффекты в модели, хотя они достойны изучения, и, опять же, являются замечательным примером, на котором можно изучать суть явления.

Среди не точных, но эффективных методов, необходимо отметить постоянно возрастающую силу численных методов. Численному анализу поддается не только двумерная, но и трехмерная модель Изинга.

Другим стандартным инструментом анализа решеточных систем является метод среднего поля. В применении к модели Изинга, он сводится к изучению систем с Гамильтонианом

$$H = \frac{qJ}{N-1} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i.$$

Эта модель анализируется довольно просто. И хотя она приводит к неправильному значению показателей (например, $\beta_{mean\ field} = \frac{1}{2}$, что явно расогласуется с точным ответом), позволяет проводить качественный анализ в реалистичных случаях.

Еще одним важным методом анализа спиновых систем является метод ренормализационной группы. Так как одной из целей курса является подготовка к дальнейшему изучению квантовых теорий поля (в том числе конформных), описывающих решеточные системы в скейлинговом пределе, обсудим по крайней мере идею этого метода, который является важным в теории поля.

Рассмотрим, например, двумерную модель Изинга. Разобьем решетку на блоки размера 3×3 . Статистическая сумма модели пусть записана в виде

$$Z(N, K, L, h) = \sum_{spins} e^{-H(\sigma_j)}.$$

Вычислим сумму по 9 спинам внутри каждого из блоков спинов. Если сумма 9 спинов внутри блока будет положительной, скажем, что данный блок имеет значение +1. Если отрицательной, то сопоставим блоку -1.

Можно попробовать представить статистическую сумму в виде суммы на решетке меньшего размера, с числом "спинов" $N/3^2$. При этом размер ячейки увеличился в 3 раза, соответственно, соответствующие импульсы уменьшатся в 3 раза. Можно попытаться найти Гамильтониан для остающихся степеней свободы

$$Z'(N', K', L', h') = \sum_{\text{block spins}} e^{-H'(\sigma_j)}.$$

Здесь суммирование уже идет по $n' = b^{-d}n$ спином, где параметр перемасштабирования $b = 3$, а размерность пространства $d = 2$.

Мы бы хотели в идеальной ситуации привести гамильтониан H' в вид H , но, возможно, что с другими параметрами K, L, h и т.д. Тогда, например, критические точки ренорм группы, в которых $H' = H$ были бы инвариантны относительно растяжений. Возмущение критического гамильтониана различными решеточными операторами соответствовало бы теориям, связанным с данными критическими точками, а анализ соответствующих потоков ренормгруппы давал бы представление о пространстве теорий, имеющих данную критическую точку как фиксированную точку ренорм группы. Эти вопросы подробно обсуждаются в курсах квантовой теории поля.

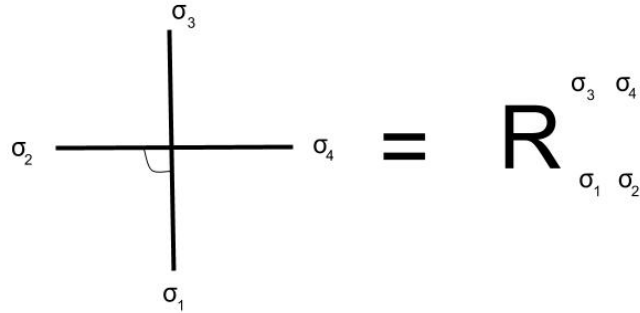


Fig. 1. R матрица как больцмановский вес.

9. Вершинные модели

В настоящем разделе мы начинаем изучение шести вершинной и восьми вершинной моделей. В вершинных моделях спиновые переменные

$$\sigma = \pm 1$$

ассоциированы с ребрами решетки, а не с узлами. В моделях на квадратной решетке будем теперь предполагать, что локальное взаимодействие описывается больцмановскими весами, ассоциированными с узлами, или вершинами, решетки. А сами больцмановские веса зависят от четырех спинов на ребрах решетки вокруг вершины.

$$R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_3\sigma_4} = e^{-\varepsilon(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)/kT}.$$

В общем случае, в ситуации, когда спины принимают два значения ($\sigma = \pm 1$) существует 16 возможных значений больцмановских весов $R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_3\sigma_4}$. Из-за симметрий, или каких-либо других условий, число нетривиальных значений может стать меньше. Например, в моделях без внешнего поля часто налагается условие симметрии при обращении всех знаков

$$R_{-\sigma_1-\sigma_2}^{-\sigma_3-\sigma_4} = R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_3\sigma_4}$$

Для заданной конфигурации спинов на решетке, весом конфигурации будет произведение по всем вершинам соответствующих локальных больцмановских весов. Статистическая сумма тогда - сумма по всем спином в таких конфигурациях

$$Z = \sum_{spins} e^{-\sum_{sites} \varepsilon(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)/kT} = \sum_{spins} \prod_{sites} e^{-\varepsilon(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)/kT}$$

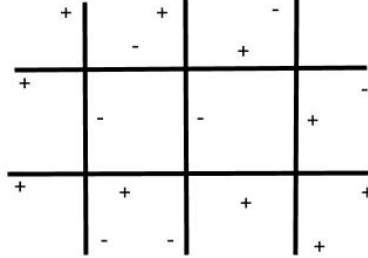


Fig. 2. Пример конфигурации спинов на ребрах квадратной решетки.

В терминах больцмановских весов R статистическая сумма, как следует из определений выше, имеет вид

$$Z = \sum_{\text{spins}} \prod_{\text{sites}} R_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma_3 \sigma_4}$$

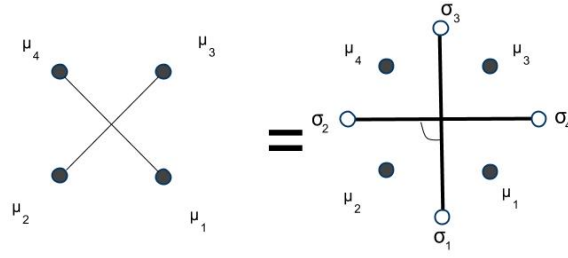
Соответствующим образом определяются корреляционные функции и другие объекты статистической механики.

На рисунке 2 представлен пример конфигурации спинов на ребрах квадратной решетки. Вес такой конфигурации вычисляется из определения

$$(R_{-+}^{+-} R_{--}^{++} R_{++}^{--})(R_{-+}^{-+} R_{-+}^{-+} R_{++}^{++}).$$

Здесь в скобках мы привели произведения больцмановских весов для первой и второй строчки. В первой скобке - вклады от трех верхних вершин, во второй - от трех нижних. Однако так как входящие элементы R_{ab}^{cd} являются просто функциями, то порядок в произведении, естественно, несущественен. Порядок станет существенным, когда мы интерпретируем больцмановские веса как элементы матрицы, и используем матричное произведение. Чтобы найти "статистическую сумму" на такой маленькой решетке, необходимо рассмотреть все возможные конфигурации спинов. Потом взять сумму соответствующих вероятностей.

Чтобы прояснить смысл данных простых определений, обратимся известному уже нам примеру двух невзаимодействующих двумерных моделей Изинга в нулевом магнитном поле. Пусть две невзаимодействующих друг с другом модели Изинга определяются, как и ранее, константами взаимодействия K и L . Рассмотрим конфигурацию четырех спинов, по-



$$e^{K\mu_2\mu_3 + L\mu_4\mu_1} = R_{\substack{\sigma_3 \ \sigma_4 \\ \sigma_1 \ \sigma_2}}$$

Fig. 3. Удвоенная модель Изинга как частный случай 8-вершинной модели.

казанную на рисунке 3 слева. Вес такой конфигурации

$$e^{K\mu_2\mu_3 + L\mu_4\mu_1}.$$

Запишем этот вес как $R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_3\sigma_4}$, сделав переход от спинов μ_1, \dots, μ_4 к спином на ребрах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ по следующему правилу. Если два изинговских спина μ_i, μ_j разделены ребром σ , то значение спина ребре равно произведению $\sigma = \mu_i\mu_j$:

$$\sigma_1 = \mu_1\mu_2, \quad \sigma_2 = \mu_2\mu_4, \quad \sigma_3 = \mu_3\mu_4, \quad \sigma_4 = \mu_1\mu_3.$$

Обратное преобразование от переменных $\{\mu_j\}$ к переменным $\{\sigma_j\}$ требует, чтобы было ограничение $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = 1$. Любому состоянию спинов в удвоенной модели Изинга соответствует одно состояние в вершинной модели. Однако, состоянию в вершинной модели соответствуют две конфигурации спинов моделей Изинга, отличающиеся заменой знака.

Явное вычисление показывает, что в силу симметрий исходной удвоенной модели Изинга есть восемь ненулевых спиновых конфигураций вокруг вершины

$$a = R_{++}^{++} = R_{--}^{--} = e^{K+L},$$

$$\begin{aligned}
b &= R_{+-}^{+-} = R_{-+}^{-+} = e^{-K-L}, \\
c &= R_{+-}^{-+} = R_{-+}^{+-} = e^{-K+L}, \\
d &= R_{++}^{--} = R_{--}^{++} = e^{K-L}.
\end{aligned}$$

Такие ненулевые конфигурации удобно представить в виде матрицы 4×4 . Именно, запишем оператор R в базисе векторов $(++, +-, -+, --)$ нумеруемых двойным индексом. В таком базисе матрица больцмановских весов имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} a & & & d \\ & b & c & \\ & c & b & \\ d & & & a \end{pmatrix}$$

(непоказанные элементы равны нулю). Мы будем называть подобные объекты R -матрицей. В общем случае, так называемой восьми-вершинной модели, конечно, веса a, b, c, d не будут выражаться через экспоненты таким простым образом, а будут иметь более сложный вид.

Трансфер матрица в случае вершинных моделей имеет стандартный вид статистической суммы столбца

$$T_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^{\sigma'_1 \dots \sigma'_n} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} R_{\mu_1 \sigma_1}^{\mu_2 \sigma'_1} R_{\mu_2 \sigma_2}^{\mu_3 \sigma'_2} \dots R_{\mu_n \sigma_n}^{\mu_1 \sigma'_n}.$$

Трансфер матрицы T , T' с весами R и R' будут коммутировать, если найдется соответствующая R'' матрица, такая, что выполнится аналог уравнения звезда-треугольник. Именно, в интегрируемом случае веса $R_{\mu_1 \mu_2}^{\mu_3 \mu_3}$ удовлетворяют важному свойству - уравнению Янга-Бакстера, или уравнению треугольников. Мы рассмотрим действие операторов на пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

Пусть v_{\pm} два базисных вектора в $\mathcal{H}_j \sim C^2$. Например, можно думать, что

$$v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $R : C^2 \rightarrow C^2$ как оператор, действующий по правилу

$$R : v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2} \rightarrow R_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2}.$$

Удобно обозначать через R_{ij} оператор, который действует нетривиально на i, j компоненты, \mathcal{H}_i и \mathcal{H}_j и единицей на все остальные. Тогда уравнение Янга-Бакстера запишется как

$$R''_{12} R'_{13} R_{23} = R_{23} R'_{13} R''_{12}$$

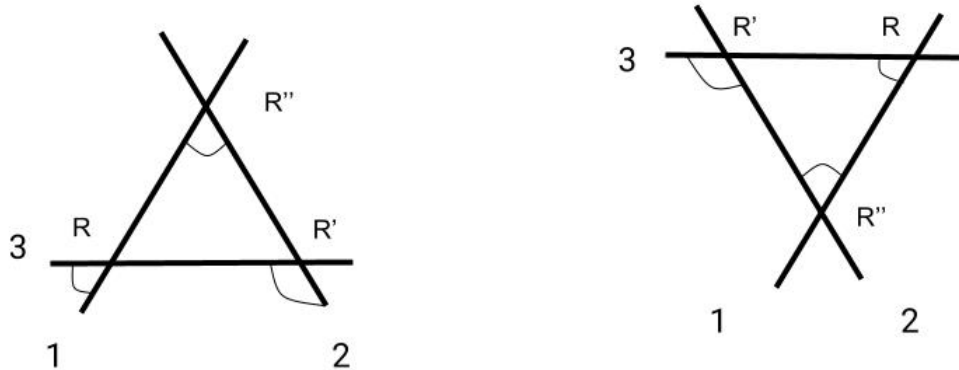


Fig. 4. Условие коммутации трансфер матриц.

А трансфер матрица как

$$T = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} (R_{0,n} \cdots R_{01}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} L.$$

Заметим, что оператор $L = R_{0,n} \cdots R_{01}$ является матрицей 2×2 . Т.е. имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

А трансфер матрица - это след такой матрицы, элементы которой являются операторами в пространстве \mathcal{H} . Из уравнения Янга-Бакстера следует, что

$$R''_{12} L'_1 L_2 = L_2 L'_1 R''_{12}, \quad TT' = T'T.$$