Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

8. Операторы порядка и беспорядка. Скейлинг

Мы продолжаем изучение двумерной модели Изинга в нулевом магнитном поле. Здесь мы делаем лишь некоторые комментарии к ппроцедуре диагонализации Йордана-Вигнера.

Ранее мы реализовали трансфер матрицу через операторы

$$\begin{aligned}\sigma_i^{\pm} &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{\pm} \otimes \cdots \otimes 1\\ \sigma_i^{z} &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{z} \otimes \cdots \otimes 1\,.\end{aligned}$$

действующие на пространстве

$$\mathcal{H} = C^2 \otimes C^2 \cdots \otimes C^2\,.$$

Именно, трансфер матрица имеет в общем случае вид

$$\begin{aligned}&T = V_2 V_1\,,\\ &V_2 = e^{K\sum \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z}\,,\\ &V_1 = (2\sinh 2L)^{1/2} e^{L^*\sum \sigma_j^x}\,,\\ &Z = Tr_{\mathcal{H}} T^m\,.\end{aligned}$$

В свободно-фермионном подходе мы реализовали матрицы Паули в виде операторов, удовлетворяющих каноническим антикоммутационным соотношениям.

$$\begin{aligned}\sigma_j^+ &= \left(e^{i\pi\sum_{i<j} C_j^+ C_j}\right) C_j^+\,,\\ \sigma_j^- &= \left(e^{-i\pi\sum_{i<j} C_j^+ C_j}\right) C_j\,,\\ \sigma_j^z &= 1 - 2C_j^+ C_j\,.\end{aligned}$$

Здесь

$$\{C_j^\dagger, C_k\} = \delta_{j,k}\,, \quad \{C_j, C_k\} = 0, \quad \{C_j^\dagger, C_k^\dagger\} = 0\,.$$

Это стандартный вид преобразования. Затем мы сделали вращение матриц Паули, чтобы получить квадратичный Гамильтониан (который легко диагонализовать). Эквивалентно, мы можем написать специфические преобразования для модели Изинга (сделав вращение в формуле Йордана-Вигнера). В данном обсуждении эти обознвачения предпочительнее (хотя ответы, конечно, совпадают):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_j^+ &= (\sigma_j^z + i\sigma_j^y)/2 = \left(e^{i\pi\sum_{i<j} C_j^+ C_j}\right) C_j^+ \,,\\ \tilde{\sigma}_j^- &= (\sigma_j^z - i\sigma_j^y)/2 = \left(e^{-i\pi\sum_{i<j} C_j^+ C_j}\right) C_j \,,\\ \sigma_j^x &= 1 - 2C_j^+ C_j \,.\end{aligned}$$

Обратное преобразование Йордана-Вигнера имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_j^+ &= \left(e^{i\pi\sum_{i<j} C_i{}^\dagger C_i}\right) C_j{}^\dagger \,,\\ \tilde{\sigma}_j^- &= \left(e^{-i\pi\sum_{i<j} C_i{}^\dagger C_i}\right) C_j \,,\\ \sigma_j^x &= 1 - 2C_j{}^\dagger C_j \,.\end{aligned}$$

После этого имеем

Игнорируя граничные члены (по сути рассматривая модель со свободными граничными условиями) мы способны диагонализовать трансфер матрицу точно так же, как делали в более простом случае одномерной квантовой цепочки Изинга в поперечном магнитном поле:

$$\begin{aligned}V_1 &= const e^{L^*\sum(1-2C_i^\dagger C_i)} \,,\\ V_2 &= e^{K\sum(C_i^\dagger - C_i)(C_{i+1}^\dagger + C_{i+1}) - K(C_n^\dagger - C_n)(C_1^\dagger + C_1)(-1)^{\sum C_i^\dagger C_i}} \,,\end{aligned}$$

Для упрощения обсуждения будем игнорировать граничный член. Делая преобразование Фурье,

$$\eta_q = \frac{1}{n^{1/2}} e^{-i\pi/4} \sum_{j=-n}^{n-1} C_j e^{iqj} \,.$$

с $q = 2\pi j/n$, получаем

$$\begin{aligned}V_1 &= const^n \prod_{0<q\le\pi} e^{2L^*(1-\eta_q^\dagger\eta_q - \eta_{-q}^\dagger\eta_{-q})} \,,\\ V_2 &= \prod_{0<q\le\pi} e^{2Ki\sin q(\eta_q^\dagger\eta_{-q}^\dagger + \eta_{-q}\eta_{-q}) - 2K\cos q(1-\eta_q^\dagger\eta_q - \eta_{-q}^\dagger\eta_{-q})} \,,\end{aligned}$$

Точное выражение для собственных значений трансфер матрицы имеет вид

$$\Lambda = (2\sinh 2L)^{n/2} \exp\frac{1}{2}\sum \lambda_q \varepsilon_q$$

где $q = 2\pi j/n, \quad \lambda_k = \pm 1$ и

$$\cosh \varepsilon_q = \cosh 2L^* \cosh 2K - \sinh 2L * \sinh 2K \cos q\,.$$

(Явная диагонализация осуществяется путем преобразования Боголюбова).

Максимальное собственное значение соответствует $\lambda_k = 1$, и в непрерывном пределе, когда n большое число, задается в терминах интеграла

$$\Lambda_{max} = (2\sinh 2L)^n/2 \exp \frac{n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_q dq$$

Свободная энергия на узел решетки, вычисляемая логарифмированием этого выражения, тогда равна

$$F = -kT\left(\log(2\sinh 2L)^{1/2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon_q dq\right)$$

Это дает решение задачи о вычислении свободной энергии двумерной модели Изинга.

Задача о точном нахождении корреляторов в модели так же просто решается в терминах свободных фермионов. Ниже мы излагаем лишь схему для нахождения точных корреляторов, отсылая за деталями к оригинальной литературе и упражнениям.

Рассмотрим для простоты ситуацию, в которой спиновые переменные $\sigma_j, \sigma_{j'}$ имеют соответственно координаты (i, j) и (i, j') на двумерной решетке. Мы ожидаем, что в скейлинговом пределе будет важно лишь расстояние между спинами, поэтому данная ситуация вполне общая. Коррелятор таких спинов запишется в виде

$$\langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle \sim Tr_{\mathcal{H}}\left(T^{m-i}\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_{j'} T^i\right)\,.$$

Единственный вопрос - как реализовать такой оператор $\hat{\sigma}_j$, который бы при действии на пространстве $\mathcal{H}$ давал бы собственное значение σ_j. Естественным образом, таким оператором является оператор σ_j^z, для которого мы знаем фермионное представление

$$\langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle = \frac{1}{Z} Tr_{\mathcal{H}}\left(\sigma_j^z \sigma_{j'}^z T^m\right)\,.$$

Таким образом, для T, σ_j^z мы имеем представление в виде фермионных операторов, а также пространство $\mathcal{H}$ реализуемо как пространство представлений фермионной алгебры. Разложим вектора в пространстве $\mathcal{H}$ по собственным векторам трансфер матрицы

$$T|\psi_\alpha\rangle = \Lambda_\alpha |\psi_\alpha\rangle\,.$$

Предполагая, что базис полный, получим для следа в корреляторе

$$\langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle = \sum_\alpha \Lambda_\alpha^m \langle \psi_\alpha | \sigma_j^z \sigma_{j'}^z | \psi_\alpha \rangle \Big/ \sum_\alpha \Lambda_\alpha^m \,.$$

Ведущий вклад в коррелятор приходит из вклада от максимального собственного вектора

$$\langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_j^z \sigma_{j'}^z | \psi_0 \rangle \,.$$

Для вычисления этого матричного элемента мы используем следующую схему.

- Запишем операторы σ_j через фермионные переменные

$$\sigma_j^z \sigma_{j'}^z = (C_j^\dagger + C_j) e^{\pi i \sum_j^{j'-1} C_k C_k^\dagger} (C_{j'} + C_{j'}^\dagger)$$

- Используя факт, что оператор фермионного числа частиц имеет собственные значения 0 и 1, распишем экспоненты как

$$e^{\pi i (C_k C_k^\dagger)} = (C_k^\dagger + C_k)(C_k^\dagger - C_k)$$

- Вычислим матричный элемент, используя Теорему Вика (или просто канонические антикоммутационные соотношения) для фермионных операторов.

- Используем наблюдение, что из-за антикоммутации различных элементов, ответ будем записан в виде детерминанта. А именно ведущий вклад в коррелятор приходит из учета максимального собственного вектора

$$\langle \psi_0 | \sigma_j^z \sigma_{j'}^z | \psi_0 \rangle = \sum P (-1)^P a_{j,P(j)} \cdots a_{j',P(j'-1)} \,.$$

  Здесь

$$a_{ij} = \langle \psi_0 | (C_i^\dagger - C_i)(C_j^\dagger + C_j) | \psi_0 \rangle = -\frac{1}{n} \sum_q e^{-iq(j-i)} e^{-i(\phi_q + q)} \,.$$

  а ϕ_q - угол поворота в преобразовании Боголюбова.

Данную схему можно легко проверить для малого числа $j - j'$. Это фиксирует точный ответ для решеточных корреляторов, который можно изучать аналитически.

Используя детерминантное представление, можно анализировать и скейлинговые свойства корреляторов. Например, точный ответ для намагниченности вытекает из следующего выражения

$$M^2 = \lim_{|j-j'|\to\infty} \lim_{n,m\to\infty} \langle \sigma_j \sigma_{j'} \rangle = \left(1 - \frac{(1-\tanh^2 K)^2 (1-\tanh^2 L)^2}{16 \tanh^2 K \tanh^2 L} \right)^{1/4}$$

Вернемся к преобразованию Йордана-Вигнера. Член

$$\mu_{j-1/2} = e^{i\pi \sum_{i<j} \sigma_j^+ \sigma_j^-}$$

выглядит немного странно. Но именно он при коммутации со спиновыми операторами дает нужный нам знак минус. Если мы приглядимся на структуру этого члена, то увидим, что это ни что иное, как оператор беспорядка. В самом деле, беря экспоненту, видно, что

$$\mu_{j-1/2} = \prod_1^{j-1} \sigma_x \, .$$

Оператор σ^x при действии на переменные

$$\text{spin up} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\text{spin down} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

как раз соответствует операции смены знака в ряду σ' , или, эквиазамены знака константа связи вдоль пути между двумя рядами спинов с номерами $1, \ldots, j-1$. Таким образом, фермионы Йордана-Вигнера как раз соответствуют произведению оператора порядка и оператора беспорядка

$$C_j = \mu_{j-1/2} \sigma_j \, ,$$

и описывают фермионы на решетке. Вычисление корреляторов операторов беспорядка и (смешанных случаев) производится по той же схеме, что и корреляторы спинов.