Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

Угловая трансфер матрица и намагниченность

5. Уравнение Янга-Бакстера в IRF виде

Рассмотрим удвоенную модель Изинга, в которой взаимодействие задается больцмановским весом следующего вида. Т.е. в модели взаимодействуют лишь следующие за ближайшими соседями. Но нет взаимодействия между ближайшими соседями. Это - так называемая свободно фермионная точка в восьмивершинной модели. Альтернативно, это две модели Изаинга, расположенные на прямой и дуальной решетках, не взаимодействуюшие друге с другом (удвоенная модель Изинга).

$$w\left(\begin{matrix} d & c \\ a & b \end{matrix}\middle| u\right) = e^{Kac+Lbd} \,.$$

В предыдущих рассуждениях мы видели удобство эллиптической параметризации больцмановских весов. Именно, вместо двух параметров K, L, определяющих взаимодействие между спинами, можно ввести параметр k, который служит мерой отклонения от критичности, и спектральный параметр u, от которого не зависят критические точки. Несмотря на то, что больцмановские веса теперь выглядят технически более сложно, такая параметризация с физической точки зрения более полезна.

Небольшая модификация предыдущей параметризации выглядит с помощью функций

$$snh(u) = -isn(iu)$$

следующим образом

$$\begin{aligned} e^{-2K} &= \frac{snh(u)}{snh(\lambda)}\,, \\ e^{-2L} &= \frac{snh(\lambda - u)}{snh(\lambda)}\,, \end{aligned}$$

Т.е. вместо того, чтобы факторизовать $\sinh 2K$ мы хотим, чтобы просто выглядел уже больцмановский вес e^{2K}. Связь между двумя параметризациями простая - это преобразование Ландена для тета функций.

Используя явные выражения для больцмановских весов в терминах констант связи K, L, можно написать следствие для уравнения звезда-треугольник в виде, показанном на рисунке.

Аналитически уравнение записывается так

$$w\left(\begin{matrix} d & c \\ a & b \end{matrix}\middle| u\right) = e^{Kac+Lbd}\,.$$

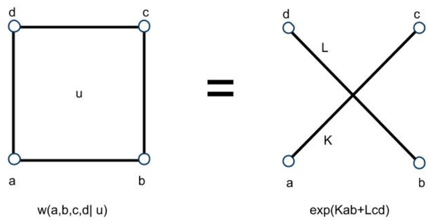

Fig. 1. Удвоенная модель Изинга .

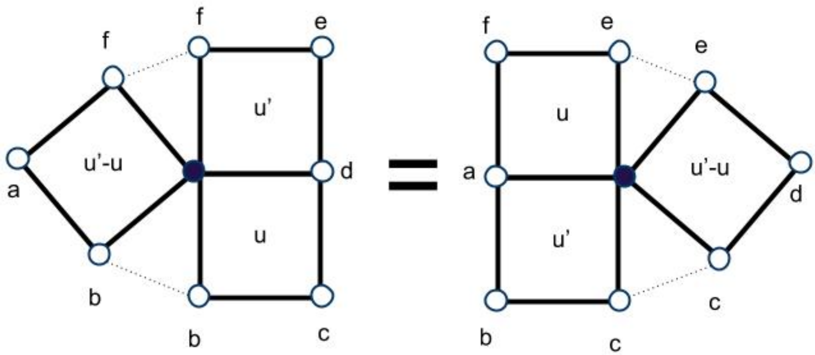

Fig. 2. Уравнение Янга-Бакстера в IRF форме.

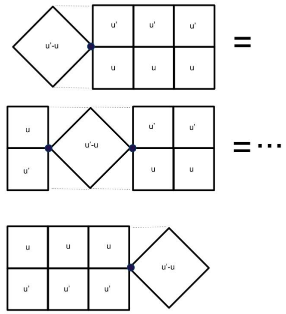

Fig. 3. YBE и коммутирующие трансфер матрицы.

Напомним, что при условии, что константы (K_j, L_j) удовлетворяют соотношениям звезда-треугольник

$$\sinh(2K_j)\sinh(2L_j) = \frac{1}{k},$$

то соотвествующие трансфер матрицы коммутируют в силу уравнения звезда-треугольник. В новых переменных для больцмановских весов w будет верно следующее функциональное уравнение

$$[T(u), T(u')] = 0$$

Это уравнение легко обобщается на случай неоднородных по u решеток. Именно, если больмановские веса в трансфер матрице $T(u_j)$ равны $\{u_1, u_2, \dots\}$, то

$$[T(u_j), T(u_j + a)] = 0 .$$

Угловая трансфер матрица вводится следующим образом. Рассмотрим на конечной решетке квадрант. Зафиксируем спины $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ и спины $\{\sigma_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots\}$, как показано на рисунке. Пусть теперь спины на границе взяты в основном состоянии, где все спины равны +1. Мы можем посчитать статистическую сумму данной решетки с фиксированными граничными условиями. Это будет некоторая функция от u, k. Опуская зависимость от k, будем считать, что такая статистическая сумма определяет матричный элемент $A_{\sigma,\sigma'}(u)$. Можно интерпретировать такую матрицу, как оператор действующий на полубесконечном (в термодинамическом пределе) пространстве спинов

$$A(u) : H^{(\sigma_0)} \to H^{(\sigma_0)} .$$

где

$$H^{(\sigma_0)} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots\} .$$

В термодинамическом пределе, мы будем считать, что спины на бесконечности взяты в каком-либо основном состоянии, например, все равны +1:

$$H^{(\sigma_0)} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, 1, 1, 1, \dots\} .$$

Удобно думать, что нормировка больцмановских весов может быть выбрана так, чтобы сделать все наблюдае-

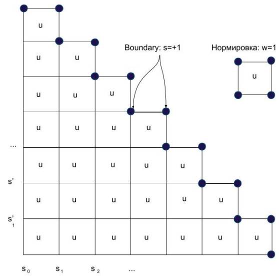

Fig. 4. Угловая трансфер матрица.

мые конечными, например, можно считать, что больцмановские веса со спинами в основном состоянии равны 1.

Пространство произвольных векторов из спинов на полупрямой будет $H = H^{(+)} \oplus H^{(-)}$. Каждая угловая трансфер матрица A при действии на $H^{(\pm)}$ представляется в виде $A|_H = A^{(+)} \oplus A^{(-)}$.

Вводя трансфер матрицы, ассоциированные с другими квадрантами, мы получаем, что статистическая сумма определяется теперь как произведение четырех угловых трансфер матриц и взятия следа по спинам вдоль полу-прямой

$$Z_+ = Tr_H\left(D(u)C(u)B(u)A(u)\right) = \sum_{\sigma_0=\pm 1} Tr_{H^{(\sigma_0)}}\left(D^{(\sigma_0)}(u)C^{(\sigma_0)}(u)B^{(\sigma_0)}(u)A^{(\sigma_0)}(u)\right)$$

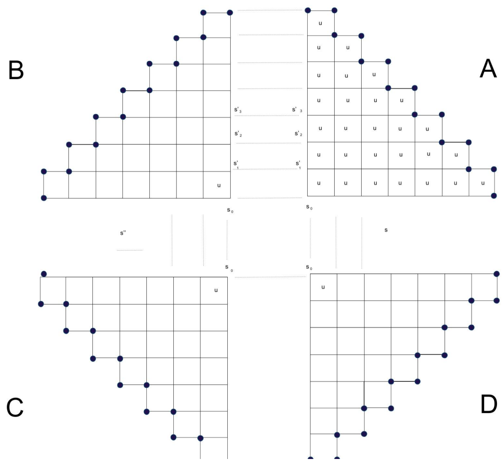

Fig. 5. Произведение 4х CTM

Обозначение Z_+ введено, чтобы подчеркнуть, что мы фиксировали граничные условия на бесконечности +1. Здесь предполагается суммирование и по центральному спину, который общий для всех четырех трансфер матриц. Вероятность конфигурации с фиксированным центральным спином (Local Height Probability) - произведение четырех угловых трансфер матриц с фиксированным спином σ_0 в углу.

$$Z_{\sigma_0,+} = \frac{1}{Z_+} Tr_{H(\sigma_0)} D(u)C(u)B(u)A(u)$$

где угловые трансфер матрицы взяты без суммирования с угловым спином σ_0.

Первое свойство угловых трансфер матриц в термодинамическом пределе может быть изучено путем рассмотрения произведения двух трансфер матриц, образующих полуплоскость. Пусть левый квадрант образован больцмановскими весами со спектральным параметром u, а левый верхний квадрант - со спектральным параметром $\lambda - v$. Фиксируя спины вдоль оси x как

$$\sigma''\sigma := \{\ldots, \sigma''_2, \sigma''_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$$

мы получаем

$$X_{\sigma'',\sigma} = \sum_{\sigma'} B_{\sigma'',\sigma'}(\lambda - v) A_{\sigma',\sigma}(u)\,.$$

Матрица B получается из матрицы A поворотом на 90 градусов против часовой стрелки. Или, эквивалентно, заменой $L \to K$. Рассмотрим сейчас явный вид для больцмановских весов. Можно найти, что в данной параметризации такой поворот осуществляется заменой

$$u \longrightarrow \lambda - u\,.$$

Это преобразование больцмановских весов будем называть кроссингом.

$$B(\lambda - v) = A(v)\,.$$

Мы прибываем к выражению для статсуммы неоднородной полуплоскости

$$X = A(v)A(u)\,.$$

Теперь изменим точку зрения на этот объект. Будем рассматривать $X_{\sigma'',\sigma}$ как вектор с индексами вдоль всей линии (ось $\sigma' \sim (-\infty, 0)$ и ось $\sigma \sim (0, \infty)$). Рассмотрим неоднородную ряд-в-ряд трансфер матрицу $T(u, \lambda - v)$. Такой вектор X будет собственной для такой трансфер матрицы T. Из уравнения Янга-Бакстера, вернее из коммутации ряд-в-ряд трансфер матриц, получаем, как и раньше, вывод, что такой вектор может зависеть лишь от разности спектральных параметров $u - (\lambda - v)$.

$$X(u+v) = A(v)A(u)\,.$$

Если это уравнение рассматривать как уравнение на собственные значения $A(u)$, то мы приходим к выводу, что решением такого функционального уравнения является экспонента вида

$$A(u) = e^{uH_c}$$

где оператор H_c, называемый угловым гамильтонианом, не зависит от u.

При аккуратном рассмотрении, можно проверить, что спектр оператора H_c является ограниченным сверху и дискретным. Более того, он является эквидистантным. Для доказательства последнего важного свойства, вспомним снова явный вид больцмановских весов. Эллипитические функции $snh(u)$ имеют два периода $4iI'$ и $4I$. Первый период добавляет лишний вещественный множитель. Так как мы игнорируем нормировки (что сделано лишь для облегчения объяснений), то мы не получаем новой информации. Однако второй период соответствует тождественному преобразованию

$$A(u+4I) \to e^{4iIH_c} A(u)\,.$$

Стартуя с вещественных положительных K, L мы бы ожидали, что

$$2IH_c/\pi \in Z$$

Т.е., что оператор H_c имеет эквидистантный спектр. Расстояние между уровнями $\pi/2I$.

Основная идея вычисления спектра основывается на этом свойстве. Пусть $q = e^{-\pi I'/I}$ - параметр эллиптических функций. Попробуем изменять I', не меняя I. Сделаем бесконечно малое преобразование такого рода - оно не должно приводить к изменению чисел состояний на данном уровне (состояний конечное число и уровни разделены). Так как мы можем варьировать параметры k, q непрерывным образом, то приходим к выводу, что спектр не зависит от этих параметров. Имея такую свободу вычисления спектра, можно его легко вычислить - полагая температуру нулем $q \to 0$.

Можно увидеть, что при таком пределе $L \to \infty$. На языке описания модели Изинга с помощью K, L мы получаем, что вдоль одной из диагоналей спины, связанные L замораживаются $e^{L\sigma\sigma'} = e^{L}$.

В этом пределе угловая трансфер матрица имеет простой вид:

$$A(u) = const \exp\left(K \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\sigma_j \sigma_{j+2}\right)$$

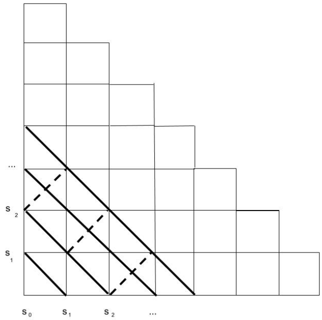

Fig. 6. Вычисление спектра угловой трансфер матрицы.

В терминах u, сдвигая нормировочную константу, мы прибываем к виду

$$A(u) = const \sum_{\{\sigma_j\}=\pm 1} \exp\left(-\frac{\pi u}{2I}\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)(1-\sigma_j\sigma_{j+2})\right)$$

Соответственно, вычисление вероятностей спинов быть σ_0, мы получаем

$$Z_{\pm,+} \sim Tr_{H^\pm} A(u)A(\lambda-u)A(u)A(\lambda-u) = Tr_{H^\pm} e^{-\lambda H_c/2I}$$

Можно показать, что эти величины задаются характерами неприводимых представлений алгебры Вирасоро с центральным зарядом $c = \frac{1}{2}$ и старшими весами 0 и 1/2, где $q = e^{-2\pi\lambda/I}$.

$$Z_{++} = \chi_0(q)\,,$$
$$Z_{-+} = \chi_{1/2}(q)$$