Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

Двумерная модель Изинга

5. Диагонализация трансфер матриц

Изложение по книге Бакстера.

Мы в данном разделе мы диагонализуем семейство коммутирующих трансфер матриц, следуя методу, основанному на существовании соотношений обращения и знания аналитических свойств.

Основная идея такого подхода - написать функциональное уравнение для физической величины, а затем, используя знание аналитических свойств (а они в интегрируемых моделях зачастую проще, чем в сложных случаях), попытаться решить его точно.

Фиксируя размер решетки по диагоналям n и m соответственно (трансфер матрицы действуют на спины на n узлах), мы выразили статистическую сумма через собственные значения диагональ-диагональ трансфер матриц.

$$Z_{nm} = Tr(WV)^m = \Lambda_1^{m/2} + \cdots \Lambda_{2^n}^{m/2}\,.$$

Здесь собственное значение матрицы WV обозначено как Λ^2. Метод предплагает рассмотрение целого семейства коммутирующих трансфер матриц

Напомним определение простых матриц $2^n \times 2^n$

$$
\begin{aligned}
I_{\sigma'\sigma} &= \delta_{\sigma'_1,\sigma_1}\delta_{\sigma'_2,\sigma_2}\cdots\delta_{\sigma'_n,\sigma_n}\,,\\
C_{\sigma'\sigma} &= \delta_{\sigma'_1,\sigma_2}\delta_{\sigma'_2,\sigma_3}\cdots\delta_{\sigma'_n,\sigma_1}\,,\\
R_{\sigma'\sigma} &= \delta_{-\sigma'_1,\sigma_1}\delta_{-\sigma'_2,\sigma_2}\cdots\delta_{-\sigma'_n,\sigma_n}\,.
\end{aligned}
$$

Матрица C сдвигов по горизонтали позволяет связать трансфер матрицы W и V

$$W(K,L) = V(K,L)C\,.$$

Матрицы I, C, R коммутируют друг с другом и с трансфер матрицами

$$
\begin{aligned}
[V(K,L),C] &= 0\,,\\
[V(K,L),R] &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Кроме того, мы имеем семейство коммутирующих трансфер матриц

$$[V(K,L),V(K',L')] = 0\,.$$

если выполняется условие

$$\sinh(2K)\sinh(2L) = \sinh(2K')\sinh(2L') = \frac{1}{k}\,.$$

Рассматривая произведение двух матриц вида

$$W(K',L')V(K,L)$$

можно найти следующее матричное соотношение инверсии

$$W(L+\frac{i\pi}{2},-K)V(K,L) = (2i\sinh 2L)^n I+(-2i\sinh 2L)^n R\,.$$

Так как матрица W с точностью до сдвига по горизонтали равна матрице V, то мы будем изучать уравнение

$$V(L+\frac{i\pi}{2},-K)V(K,L)C = (2i\sinh 2L)^n I+(-2i\sinh 2L)^n R\,.$$

Это соотношение использует аналитическое продолжение $V(K,L)$ на комплексные значения параметров K,L. Заметим, что условие коммутации трансфер матриц в LHS выполнено

$$\sinh(2(L+\frac{i\pi}{2}))\sinh(2(-K)) = \sinh(2K)\sinh(2L)\,.$$

В частности, матрицы $V((L+\frac{i\pi}{2},-K)$ и $V(K,L)$ коммутируют. Из двух параметров K,L для коммутирующих трансфер матриц один из параметров (комбинация $k(K,L)$) является существенным параметром.

Естественным было бы выделить второй "несущественный"параметр, некоторую комбинацию из (K,L) которая могла бы быть разной для коммутирующих матриц.

Выберем собственные вектора $A(k) = \{A_\sigma(k)\}$, которые бы были общими для матриц, участвующих в соотношениях обращения и для I, C, R. Здесь мы в явном виде выделили зависимость от k, подразумевая, что для всех коммутируюших трансфер матриц с данным значением k вектора зависят только от этого параметра.

$$\sum_{\sigma_1=\pm1,\ldots} V(K,L)_{\sigma',\sigma} A_\sigma(k) = v(K,L) A_{\sigma'}(k)\,,$$
$$\sum_{\sigma_1=\pm1,\ldots} C_{\sigma',\sigma} A_\sigma(k) = c A_{\sigma'}(k)\,,$$
$$\sum_{\sigma_1=\pm1,\ldots} R_{\sigma',\sigma} A_\sigma(k) = r A_{\sigma'}(k)\,,$$

Из определения матриц C, R видно, что их собственные значения имеют простой вид

$$c^n = 1, \quad r^2 = 1\ ,.$$

Более того, для вычисления стат суммы нам, по сути, не нужно значение c, так как

$$\sum_{\sigma_1=\pm1,\ldots} W(K,l) V(K,L)_{\sigma',\sigma} A_\sigma(k) = c v(K,L)^2 A_{\sigma'}(k)\,,$$

и мы интересуемся в вычислении собственного значения

$$\Lambda = c v^2\,,$$

а уравнение на Λ не будет содержать собственное значение c, как мы увидим ниже.

Основная проблема в том, чтобы найти $v(K,L)$ (вернее Λ). Идея состоит в том, что уравнение обращения

$$V(L+\frac{i\pi}{2}, -K) V(K,L) C = (2i\sinh 2L)^n I + (-2i\sinh 2L)^n R$$

приводит к функциональному уравнению на собственные значения

$$v(L+\frac{i\pi}{2},-K)v(K,L)C=(2i\sinh 2L)^n+(-2i\sinh 2L)^n r\,,$$

или

$$\Lambda(L+\frac{i\pi}{2},-K)\Lambda(K,L)C=(2i\sinh 2L)^n+(-2i\sinh 2L)^n r\,,$$

а последнее можно решить явно, учитывая аналитическую структуру собственных значений.

Для изучения метода, рассмотрим простейший случай $k=1$. В данном случае анализ простой и не затенен лишними техническими сложностями. Пусть

$$\sinh(2(L+\frac{i\pi}{2}))\sinh(2(-K))=1\,.$$

Попробуем рассмотреть параметризацию этого соотношения

$$\begin{aligned}\sinh 2K &= \tan u\,,\\ \sinh 2L &= \cot u\,.\end{aligned}$$

Тогда трансфер матрицы V, WV с разными u все равно будут коммутировать, так как значение $k=1$ фиксировано.

Данная параметризация не единственна, конечно. Она хороша тем, что $\exp(2K)$ и $\exp(2L)$, а значит и матрицы V имеют простую аналитическую структуру по параметру u:

$$e^{\pm 2K} = \frac{1 \pm \sin u}{\cos u}\,,$$
$$e^{\pm 2L} = \frac{1 \pm \cos u}{\sin u}\,.$$

Это позволит фиксировать вид собственных значений (нули и полюса мероморфной периодической функции на комплексной плоскости u определят саму функцию).

Из выражений выше видно, что все матричные элементы $V_{\sigma,\sigma'}$ трансфер матриц являются линейными комбинациями степеней подобных тригонометрических выражений:

$$Polynoms\left(\frac{1 \pm \sin u}{\cos u}, \frac{1 \pm \cos u}{\sin u}\right).$$

Степень тригонометрического полинома высчитывается из явного определения трансфер матрицы в терминах констант $e^{\pm 2K}$, $e^{\pm 2L}$. Для простоты мы рассмотрим случай, когда число узлов n будет четным.

Центральный момент метода: собственные значения трансфер матриц тоже имеют такую же аналитическую структуру. Именно, как функции от u, это мероморфные, периодические, однозначные функции. В данном случае эти функции имеют вид рациональных выражений от тригонометрических полиномов с известным положением полюсов и известной структурой нулей. Более точно, как функции от u они имеют вид суммы членов вида

$$e^{-2inu}\left(c_0 + c_1 e^{iu} + \cdots c_{2n} e^{2iun}\right)(\sin u \cos u)^{-n/2} .$$

Утверждение следует из рассмотрения определения собственных векторов, которые были выбраны как независящие от u

$$\sum_{\sigma} (WV)_{\sigma',\sigma} A_{\sigma}(k) = \Lambda^2(u,k) A_{\sigma'}(k) .$$

Мы видим, что для фиксированного σ' собственное значение Λ^2 может быть рассмотрено как линейная комбинация функций мерофорфных функций $(WV)_{\sigma',\sigma}$, а коэффициенты в этой линейной комбинации не зависят от u. Значит и аналитическая структура собственных значений будет такая же, как у элементов трансфер матрицы. (Если бы собственные вектора зависели от u, то данное утверждение было бы неверным).

Из этого факта можно определить вид собственных значений с точностью до положения нулей. Что является очень важным - в наших мероморфных функциях известны полюса. Если бы мы знали все нули (факторизовали бы полином по e^{iu}), мы бы определили и всю функцию.

Обозначим собственное значение двойной трансфер матрицы $WV(K,L)$ как $\Lambda^2(u)$. Тогда оператор $WV(L+\frac{i\pi}{2}, -K)$ имеет собственное значение $\Lambda^2(u+\frac{\pi}{2})$.

В новой параметризации уравнение обращения выглядит сейчас как

$$\Lambda(u+\frac{\pi}{2})\Lambda(u) = (2i\cot u)^n + (-2i\tan u)^n r ,$$

Так как уравнение на собственные значения трансфер матриц содержит собственное $r = \pm 1$ оператора R, рассмотрим оба случая $r = +1$ и $r = -1$.

i) $r = -1$. В этом случае $\Lambda(u + i\pi) = -\Lambda(u)$. Аккуратно подсчитывая степень тригонометрического полинома, находим, что после факторизации, с вводом неизвестных пока нулей u_j собственное значение трансфер матриц имеет вид

$$\Lambda(u) = const \frac{1}{(\sin u \cos u)^p} \prod_{j=1}^{2p-1} \sin(u - u_j)$$

Здесь и далее для простоты мы положили, что число узлов $n = 2p$ является четным.

Тогда уравнение инверсии имеет вид

$$\prod_{j=1}^{2p-1} \sin(u - u_j) \cos(u - u_j) = const(\cos^{4p} u - \sin^{4p}(u))$$

Так как уравнение должно выполняться для любых u, то нули левой части должны быть нулями правой

$$\cos^{4p} u_j - \sin^{4p}(u_j) = 0 \,.$$

Различные решения этого уравнения (соответствующие различным собственным значениям $\Lambda(u)$) имеют вид

$$u_j = \mp \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \log \tan \frac{\pi j}{4p} \,,$$

где $j \in \{1, 2, \ldots, 2p-1\}$. Количество таких решений 2^{2p-1} совпадает с количеством нулей левой части. Наивно, ожидаем, что собственные значения $\Lambda(u)$ фиксированы.

$$\Lambda(u) = \frac{const}{(\sin u \cos u)^p} \prod_{j=1}^{2p-1} \sin(u + \frac{i}{2} \log \tan \frac{\pi j}{4p} + \frac{\pi}{4}\gamma_j)$$

где $\gamma_j = \pm 1$. Нужно, конечно, убедиться, что все решения различны.

i) $r = 1$. Случай рассматривается аналогично. Решение уравнения

$$\prod_{j=1}^{2p} \sin(u - u_j) \cos(u - u_j) = const(\cos^{4p} u + \sin^{4p}(u))$$

имеют вид

$$u_j = \mp \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \log \tan \frac{\pi(j - 1/2)}{4p} \,.$$

Снова j пробегает значения от 1 до $2p$. Довольно деликатный момент состоит в том, что найденное нами число различных решений уравнения обращения сейчас 2^{2p}. По одному для каждого выбора знака. Необходимо аккуратно изучить, какие из решений физические. Рассмотрев предел $u \to \pm i\infty$ можно показать, что

$$\Lambda(i\infty) = \Lambda(-i\infty) \,.$$

Подставляя в это равенство выражения для ответов, отсюда находим, что

$$\sum_j u_j = \frac{\pi}{2} p + \pi m \,.$$

Поэтому из найденных решений (перебор всех возможных знаков в $\mp\frac{\pi}{4}$)) нетривиальных остается лишь 2^{2p-1} решений. Мы приходим к ответу для собственных значений в этом случае

$$\Lambda(u) = \frac{const}{(\sin u \cos u)^p} \prod_{j=1}^{2p} \sin(u + \frac{i}{2} \log\tan\frac{\pi(j-1/2)}{4p} + \frac{\pi}{4}\gamma_j)$$

где $\gamma_j = \pm 1$ и

$$\sum_{j=1}^{2p} \gamma_j = 2p - 4m$$

с $m \in Z$.