Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

Двумерная модель Изинга

3. Уравнение звезда-треугольник

При рассмотрении преобразования дуальности Крамерса-Ваннье в модели Изинга на шестиугольной и треугольной решеток мы видели, что трюк с угадыванием критической температуры, импользованный нами в случае квадратной решетки, не работает. Дуальная решетка не эквивалентна обычной.

Попробуем найти дополнительное преобразование, которое позволило бы связать низко-температурное разложение на, скажем, треугольной решетке с высокотемпературным разложением на треугольной же решетке. Такое преобразование называется уравнением звезда-треугольник.[1] Оно тоже переводит статистическую сумму на гексагональной решетке в статистическую сумму на треугольной решетке. Однако имеет другой вид.

[1] В теории точно-решаемых моделей вопросы, которые возникают из решения физических проблем, зачастую приводили к необходимости развивать новый на тот момент математический аппарат. В данном случае уравнение звезда-треугольник - это знаменитое уравнение Янга-Бакстера для модели Изинга.

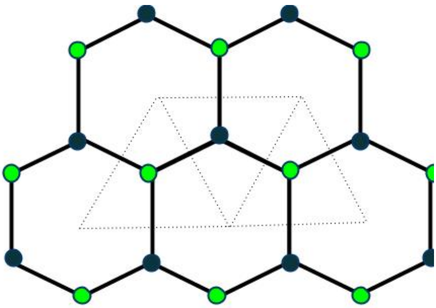

Fig 1. Krammers-Wannier

Пусть константы взаимодействия на шестиугольной решетке определены как и ранее. Выделим на гексагональной решетке две подрешетки. Назовем их типами А и Б. Условие - соседи у любого спина типа А, будут спины типа Б. И наборот.

Рассмотрим статистическую сумму на гексогональной решетке. При нулевом магнитном поле она имеет вид

$$Z_N^{(6)} = \sum \exp\left(L_1 \sum \sigma_i \sigma_l + L_2 \sum \sigma_j \sigma_l + L_3 \sum \sigma_k \sigma_l\right) ,$$

Здесь первая сумма в экспоненте берется по всем ребрам в направлении ребра L_1, и т.д.

Суммирование по узлам типа В (узлам l) можно отделить от суммирования по узлам типа А (узлам i, j, k),

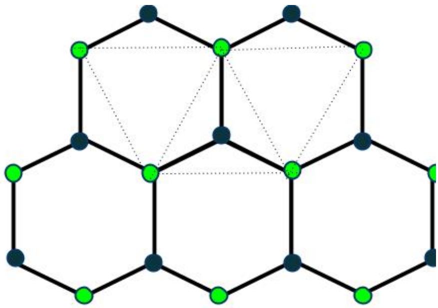

Fig. 2 Star-triangle

и провести явно, рассмотрев в качестве больцмановского веса конфигурацию трех спинов (см. левую диаграмму на рис. 3). Именно,

$$Z_N^{(6)} = \sum_{\sigma_A} \prod_{i,j,k} \sum_{\sigma_B} \prod_{l} W\left(\sigma_l | \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right)$$

где

$$W\left(\sigma_l | \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right) = \exp\left(\sigma_l \left(L_1 \sigma_i + L_2 \sigma_j + L_3 \sigma_k\right)\right.$$

Но в статистическую сумму данный спин σ_l в узле l типа Б входит всего в одном из факторов W. Поэтому мы можем провести суммирование по $\sigma_l = \pm$ явно

$$w\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right) = \sum_{\sigma_l = \pm} W\left(\sigma_l | \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right) =$$

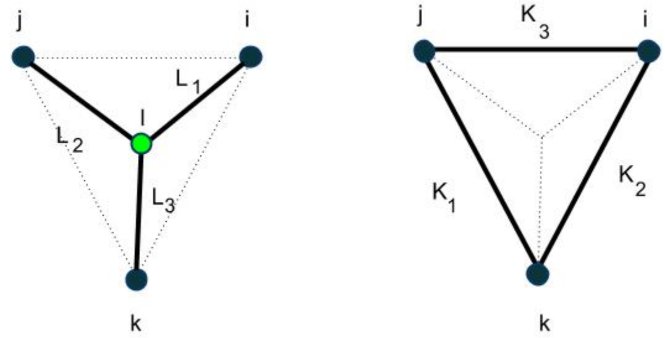

Fig. 3. Star-triangle Equation (Onsager 1944, Wannier 1945)

$$= 2\cosh\left(L_1\sigma_i + L_2\sigma_j + L_3\sigma_k\right)$$

и

$$Z_N^{(6)} = \sum_{\sigma_A} \prod_{i,j,k} w\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right)$$

Таким образом, мы провели суммирование по всем узлам типа l - из подрешетки Б. Но с каждыми тремя соседними узлами (i, j, k) типа А уже связан больцмановский вес $w(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$.

Этот больцмановский вес фигуры с ногами i, j, k и фиксированными спинами $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ показан графически на рис. 3 слева (по центральному спину проведено суммирование).

Спины $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ фиксированы. Если бы мы сумели найти модель Изинга, в которой связи бы шли вдоль ребер (ik), (j,k), (ij), такую, что вес соответствующего треугольника i,j,k (см. рис. 3 справа) был бы равен $w\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right)$, то мы бы нашли статистическую сумму в терминах статистической суммы на треугольной решетке.

Таким образом, мы хотим решить *уравнение звезда-треугольник* рис. 3. При фиксированных внешних спинах $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$, зная $\{L_j\}$ найти величины $\{K_j\}$ такие, что

$$w\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right) = R \exp\left(K_1 \sigma_j \sigma_k + K_2 \sigma_k \sigma_i + K_3 \sigma_i \sigma_j\right)$$

Тогда соответствие между статистическими суммами на гексагональной решетке с константами $\{L_j\}$ и на треугольной решетке с констатнами $\{K_j(L_1, L_2, L_3)\}$ было бы очень простым

$$\begin{aligned} Z_N^{(6)} &= \sum_{\sigma_A} \prod_{i,j,k} w\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right) = \\ &= R^{N/2} \sum_{\sigma_A} \prod_{i,j,k} \exp\left(K_1 \sum \sigma_j \sigma_k + K_2 \sigma_k \sigma_i + K_3 \sum \sigma_i \sigma_j\right) \end{aligned}$$

или

$$Z_N^{(6)}(L_1, L_2, L_3) = R^{N/2} Z_{N/2}^{(3)}(K_1, K_2, K_3)$$

Решение уравнения звезда-треугольник (для произволных значений внешних спинов)

$$2 \cosh\left(L_1 \sigma_i + L_2 \sigma_j + L_3 \sigma_k\right) =$$

$$= R \exp\left(K_1 \sigma_j \sigma_k + K_2 \sigma_k \sigma_i + K_3 \sigma_i \sigma_j\right)$$

делается прямым образом и задается простыми выражениями

$$e^{4K_1} = \frac{cc_1}{c_2 c_3}$$

Где

$$\begin{aligned} c &= \cosh(L_1 + L_2 + L_3) \\ c_i &= \cosh(-L_i + L_j + L_k) \end{aligned}$$

и такие же выражения для перестановок i, j, k.

Более симметричная форма ответов дана ниже

$$\sinh 2K_j \sinh 2L_j = \frac{1}{k}, \quad j = 1, 2, 3$$

Наконец,

$$R^2 = 2k \sinh 2L_1 \sinh 2L_2 \sinh 2L_3$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\sinh 2L_1 \sinh 2L_2 \sinh 2L_3}{2(cc_1c_2c_3)^{1/2}}$$

4. Коммутирующие трансфер матрицы

В предыдущем разделе мы решили уравнение звезда-треугольник. Это уравнение возникло у нас при решении задачи нахождения критической температуры для модели Изинга на гексагональной (треугольной) решетке.

Однако, уравнение является очень важным и для модели на квадратной решетки. Более того, это простейший пример уравнения Янга-Бакстера, а большинство точно-решаемых двумерных моделей статмеханики так или иначе связано с этим уравнением.

Такая ситуация, когда решение некоторой корректно поставленной физической задачи приводит к необходимости введения новых уравнений, методов, к открытию важных универсальных математических структур, очень часто встречалась в данной области теоретической физики. Т.е. постановка осмысленных физически интересных задач часто приводила и приводит к развитию математики, давая некие разумные ограничения, намеки о правильности - для фантазии математиков.

Мы возвращаемся к моделям на квадратной решетке. В двумерной модели Изинга в отсутствие внешнего поля можно ввести аналог трансфер матрицы, которая была явно диагонализована в одномерном случае. Существует много способов вычисления собственных значений трансфер матрицы (Onsager, Kauffman, Lieb-Schultz-Mattis etc.).

Мы в данном разделе следуем методу, основанному на существовании *коммутирующих* трансфер матриц. Мы будем рассматривать диагональ-диагональ трансфер матрицы.

Основная идея такого подхода - написать функциональное уравнение для физической величины, а за-

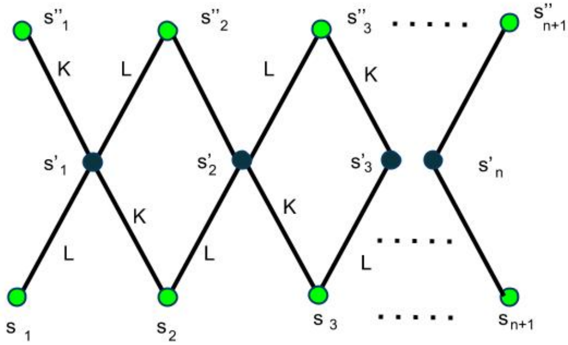

Fig. 1

тем, используя знание аналитических свойств (а они в интегрируемых моделях зачастую проще, чем в сложных случаях), попытаться решить его точно. Преимущество такого подхода, в отличие, например, от прямых методов, основанных на специфике модели Изинга, в том, что способ обобщается на другие сложные интегрируемые модели. В частности, метод подчеркивает важность анализа аналитической структуры физически важных величин, что в интегрируемых случаях является стандартным рабочим инструментом.

Рассмотрим диагональ диагональ трансфер матрицы W, V с матричными элементами $W_{\sigma'',\sigma'}, V_{\sigma',\sigma}$ определенными как на рис.1. Данные матрицы действуют в пространстве спиновых переменных $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ размерностью 2^n

$$V : \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \longrightarrow \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}\,,$$
$$W : \{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n\} \longrightarrow \{\sigma''_1, \ldots, \sigma''_n\}\,.$$

и мы предполагаем для простоты перидические граничные условия в диагональном направлении $\sigma_{n+1} = \sigma_1$. Конкретные правила для определения соответствующих матричных элементов $W_{\sigma'',\sigma'}, V_{\sigma',\sigma}$ считываются из рисунка:

$$V_{\sigma',\sigma} = \exp\left(L\sigma_1\sigma'_1 + K\sigma_2\sigma'_1 + \cdots + K\sigma_1\sigma'_n\right)\,,$$
$$W_{\sigma'',\sigma'} = \exp\left(K\sigma_1\sigma'_1 + L\sigma_2\sigma'_2 + \cdots + L\sigma'_n\sigma''_n\right)\,.$$

Т.е. матричный элемент $V_{\sigma',\sigma}$, например, это просто больцмановский вес нижней конфигурации диагональ-диагоноль, показанной на рисунке 1. Соотвественно, если мы просуммируем произведение $W_{\sigma'',\sigma'}V_{\sigma',\sigma}$ по спинам

$$\{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n\}\,,$$

то мы получим больцмановский вес всей фигуры, показанной на рис. 1. "Ноги"σ, σ'' при этом остаются фиксированными, а по средним спинам σ' проведение суммирование (мы их отметили другим цветом).

С точки зрения матриц, суммирование по средним спинам - матричное умножение

$$(WV)_{\sigma''\sigma} = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_n=\pm 1} W_{\sigma'',\sigma'}V_{\sigma',\sigma}\,.$$

Если размер решетки по диагоналям n и m соответственно (трансфер матрицы действуют на спины на n узлах), то, так же как в одномерном случае, статистическая сумма выражается через произведение нескольких диагональ-диагональ трансфер матриц.

$$(WV)^{m/2}_{\sigma'\sigma} \to \sum_{interm.\ spins} (WV)_{\sigma'\tau'} \cdots (WV)_{\tau\sigma} \, .$$

При этом матричное умножение на $(WV)_{\sigma'\tau}$ приводит к учету лишней пары рядов спинов. Чтобы учесть суммирование по спинам в первом ряду (и самом верхнем - при наложении перилодических граничных условий), необходимо взять матричный след по остаюущимся переменным $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$

Вычисление статистической суммы опять сводится к диагонализации трансфер матриц. Усложнение по сравнению с одномерным случаем в том, что теперь нужно иметь дело с матрицами размером $2^n \times 2^n$

$$Z_N = Tr(WV)^m = \Lambda_1^{m/2} + \cdots \Lambda_{2^n}^{m/2} \, .$$

Здесь собственное значение матрицы WV обозначено как Λ^2.

Уравнение звезда-треугольник позволяет нам сделать утверждение о важном соотношении для трансфер матриц с разными параметрами

$$W(K', L')V(K, L) = W(K, L)V(K', L')$$

при условии, что константы (K', L') и (K, L) удовлетворяют соотношению

$$\sinh(2K)\sinh(2L) = \sinh(2K')\sinh(2L') = \frac{1}{k}\,.$$

Введем на нашем 2^n мерном пространстве спиновых переменных операторы сдвига спинов в горизонтальном направлении C, оператор обращения спинов R и единичный оператор

$$\begin{aligned}
I_{\sigma'\sigma} &= \delta_{\sigma'_1,\sigma_1}\delta_{\sigma'_2,\sigma_2}\cdots\delta_{\sigma'_n,\sigma_n}\,,\\
C_{\sigma'\sigma} &= \delta_{\sigma'_1,\sigma_2}\delta_{\sigma'_2,\sigma_3}\cdots\delta_{\sigma'_n,\sigma_1}\,,\\
R_{\sigma'\sigma} &= \delta_{-\sigma'_1,\sigma_1}\delta_{-\sigma'_2,\sigma_2}\cdots\delta_{-\sigma'_n,\sigma_n}\,.
\end{aligned}$$

Эти операторы действуют на пространстве спиновых переменных и являются матрицами размера $2^n \times 2^n$.

Используя явные определения, можно показать, что матрица C сдвигов по горизонтали позволяет связать трансфер матрицы W и V

$$W(K, L) = V(K, L)C\,.$$

Важно, что I, C, R коммутируют друг с другом и также

$$\begin{aligned}
[V(K, L), C] &= 0\,,\\
[V(K, L), R] &= 0\,.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$[V(K, L), V(K', L')] = 0\,.$$

если выполняется следующее условие

$$\sinh(2K)\sinh(2L) = \sinh(2K')\sinh(2L') = \frac{1}{k}\,.$$

Т.е. по заданным K, L с произведением синусов, дающих число $1/k$, для даннй трансфер матрицы можно найти бесконечное число других трансфер матриц, зависящих от других параметров K', L', если эти параметры дают такое же число $1/k$.

Так как коммутирующие матрицы допускают систему собственных векторов, то можно искать именно такие собственные вектора и такие собственные значения для целого семейства трансфер матриц. Из-за существования целого семейства трансфер матриц, диагонализация становится возможной.