Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

10. XXZ модель, координатный анзатц Бете

Мы рассматриваем шести-вершинную модель и соответствующую XXZ модель. R-матрица задана как

$$\begin{aligned} a(u|\lambda) &= \sin(\lambda - u)\,, \\ b(u|\lambda) &= \sin(u)\,, \\ c(u|\lambda,) &= \sin(\lambda)\,. \end{aligned}$$

В силу уравнения Янга-Бакстера соответствующие трансфер матрицы коммутируют

$$T(u)T(v) = T(v)T(u)\,.$$

Можно поставить задачу о даигонализации трансфер матриц путем использования коммутационных соотношений в алгебре операторов матриц монодромий. Мы сделаем это чуть позже, в рассмотрении алгебраического анзатца Бете.

В настоящем разделе мы изучим координатный анзатц Бете для XXZ спиновой цепочки. Напомним, что Гамильтониан XXZ модели появляется в разложении трансфер матрицы по спектральному параметру

$$T^{-1}(0)T(u) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} H_j u^j\,.$$

Именно, H_1 с точностью до нормировки совпадает с Гамильтонианом XXZ цепочки в нулевом магнитном поле

$$H_{XXZ} = -J\sum_{1}^{n} \left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + \Delta(\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z - 1)\right)\,.$$

Трансфер матрица шести вершинной модели коммутирует с H_{XXZ} и имеется система общих собственных векторов. Поэтому мы эффективно решаем и задачу диагонализации трансфер матрицы шестивершинной модели.

Напомним, что операторы σ_j^x и другие действуют на на пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

единицей на всех компонентах кроме j-го. На j-ом пространстве оператор σ_j^x действует матрицей σ^x. Базисные вектора в пространствах $\mathcal{H}_j$ удобно выбрать как вектора

$$v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

такие, что матрица σ^z действует как

$$\sigma^z v^\pm = \pm v^\pm .$$

Оператор спина $S = \frac{1}{2} \sum \sigma^z$ коммутирует с Гамильтонианом, и, таким образом, собственные вектора разбиваются на сектора с данным значением спина. Рассмотрите единственный представитель со спином $n/2$

$$\Psi_0 = v^+ \otimes \cdots \otimes v^+ .$$

Ясно, что

$$S\Psi_0 = \frac{n}{2}\Psi_0 .$$

Действие H_{XXZ} на векторах типа

$$|j\rangle = \sigma_j^- \Psi_0$$

легко находится с использованием определений матриц Паули. Для одночастичных возбуждений, соответствующих квазичастицам, используя свойство периодичности, мы ищем собственные вектора в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} a_j |j\rangle$$

Уравнение

$$H_{XXZ}\Phi = \varepsilon\Phi$$

Сводится к условию

$$-a_{j-1} - a_{j+1} + 2\Delta a_j = \varepsilon a_j$$

Выбирая коэффициенты $a_j = e^{ikj}$, находим решение этого уравнения. Важным шагом является учет условия периодичности граничных условий

$$a_{n+1} = a_1 ,$$

что накладывает ограничения на дозволительные значения импульсов k. В итоге мы получаем решение одночастичной задачи

$$\varepsilon_k = 2(\Delta - \cos k) , \quad k = \frac{2\pi}{n} j, \quad j = 0, 1, \ldots n-1 .$$

Отметим здесь, что при $\Delta > 1$ энергии являются положительными. Вектор Ψ_0 является вакуумным, а режим похож на ферромагнитный режим в модели Изинга. При $\Delta < -1$, наоборот, ε_k отрицательны. В данном (афтиферромагнитном) режиме вектор Ψ_0 это не настоящий вакуум (а псевдовакуум). Вакуумный вектор имеет вид $v^+ \otimes v^- \otimes v^+ \cdots$. В области $-1 < \Delta < 1$ имеется бесщелевой режим, и вакуум нетривиален.

Решение одночастичной задачи было получено простым преобразованием Фурье. Однако в двучастичной задаче возникает более сложная ситуация. Рассмотрим возбуждения над псевдовакуумом вида

$$\Psi_{jl} = \sigma_j^- \sigma_l^- \Psi_0$$

Это вектора вида

$$\Psi_{jl} = v^+ \otimes \cdots \otimes v^+ \otimes v^- \otimes v^+ \otimes \cdots v^+ \otimes v^- \otimes v^+ \cdots \otimes v^+ \,,$$

где v^- стоят на j-ом и l-ом местах. Данные состояния находятся в секторе со спином $\frac{n}{2} - 2$:

$$S\Psi_{j,l} = (\frac{n}{2} - 2)\Psi_{j,l} \,.$$

Для поиска собственных векторов в данном секторе рассмотрим выражение с непопределенными коэффициэнтами

$$\Phi = \sum a_{jl} \Psi_{jl} \,.$$

Мы хотим, чтобы Гамильтониан цепочки действовал бы на эти вектора по правилу

$$H_{XXZ}\Phi = \varepsilon\Phi \,.$$

Сначала найдем действие гамильтониана спиновой цепочки на вектора $\Psi_{j_1 j_2}$. Будем различать два случая - когда $j_1 + 1 < j_2$ и когда $j_1 + 1 = j_2$. Далее, используя инвариантность по отношению к сдвигам, перепишем получившиеся условия для коэффициэнтов a_{j_1,j_2}:

$$\begin{aligned} &H_{XXZ}\Phi = \\ &- \sum_{j_1+1<j_2} \left(a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j2} + a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j_2-1} + a_{j_1,j_2+1} - 4\Delta a_{j_1,j_2}\right) \Psi_{j_1,j_2} - \\ &- \sum_{j} \left(a_{j-1,j+1} + a_{j,j+2} - 2\Delta a_{j,j+1}\right) \Psi_{j,j+1} \,. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую сумму по $j_1 + 1 < j_2$, используя анзатц плоских волн, т.е. предполагая, что $a_{j_1 j_2}$ дается

$$e^{j_1 k_1 + j_2 k_2} \,,$$

Мы находим, что

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{j_1+1<j_2} \left(a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j2} + a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j_2-1} + a_{j_1,j_2+1} - 4\Delta a_{j_1,j_2}\right) \Psi_{j_1,j_2} = \\
&= -\left(\left(e^{ik_1} + e^{-ik_1} - 2\Delta\right) + \left(e^{ik_2} + e^{-ik_2} - 2\Delta\right)\right) \sum_{j_1+1<j_2} a_{j_1 j_2} \Psi_{j_1 j_2} = \\
&= \left(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}\right) \sum_{j_1+1<j_2} a_{j_1 j_2} \Psi_{j_1 j_2} \,.
\end{aligned}
$$

Из явного вида ε_k мы замечаем, что подобный ответ будет и для экспонент вида

$$
e^{\pm j_1 k_1 \pm j_2 k_2}\,, \quad e^{\pm j_1 k_2 \pm j_2 k_1}\,,
$$

как и для их линейных комбинаций. Анзатц, который мы используем (анзатц Бете) предполагает сумму лишь двух членов

$$
a_{j_1 j_2} = A_{12}(k_1, k_2) e^{j_1 k_1 + j_2 k_2} + A_{21}(k_1, k_2) e^{j_1 k_2 + j_2 k_1}\,.
$$

С точки зрения теории рассеяния, в нашей взаимодействующей теории есть две частицы, которые на пространственной бесконечности представляются плоскими волнами, имеющими импульсы k_1, k_2. После рассеяния данных частиц (переход от координат $j_1 < j_2$ к $j_1 > j_2$) происходит обмен импульсами, но нет отраженной волны. Т.е. рассеяние безотражательное и фаза равна $A_{12}(k_1, k_2)/A_{21}(k_1, k_2)$.

В случае $j_1 + 1 < j_2$ данный анзатц сразу дает собственный вектор с собственным значением $\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}$. Однако, нам надо удовлетворить и случаю $j_1 + 1 = j_2$, подобрав коэффициенты A_{12}, A_{21} так, чтобы удовлетворялось равенство

$$
-\sum_j \left(a_{j-1,j+1} + a_{j,j+2} - 2\Delta a_{j,j+1}\right) \Psi_{j,j+1} = \left(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}\right) \sum_j a_{j,j+1} \Psi_{j,j+1}\,.
$$

Решение этого уравнения дается следующим условием для коэффициентов (и, соответственно, "матрицу"рассеяния, которая представляется простой фазой)

$$
S(k_1, k_2) = \frac{A_{12}(k_1, k_2)}{A_{21}(k_1, k_2)} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2}}\,.
$$

Чтобы фиксировать вид собственных векторов, нам осталось наложить условие периодичности - спин 1 и спин $n+1$ отождествляются при периодических граничных условиях. На уровне векторов Ψ_{j_1,j_2} это сводится к равенству

$$
\Psi_{j,n+1} = \Psi_{1,j}\,,
$$

которое (с учетом предписания, что мы упорядочиваем операторы как $j_1 < j_2$) для коэффициентов $a_{j_1 j_2}$ переписывается в виде

$$a_{j,n+1} = a_{1,j}\,.$$

Подставляя это условие в выражение для

$$a_{j_1 j_2} = A_{12}(k_1, k_2)e^{j_1 k_1 + j_2 k_2} + A_{21}(k_1, k_2)e^{j_1 k_2 + j_2 k_1}\,.$$

получаем уравнения для связи коэффициентов A_{12}, A_{21} из-за периодичности цепочки XXZ

$$\begin{aligned} A_{12}e^{ik_2 n} &= A_{21}\,, \\ A_{21}e^{ik_1 n} &= A_{12}\,. \end{aligned}$$

Эквивалентно, мы получаем следующие функциональные уравнения для дозволительных импульсов k_1, k_2 в терминах матрицы $S(k_1, k_2)$

$$\begin{aligned} S(k_1, k_2)e^{ik_2 n} &= 1\,, \\ S(k_2, k_1)e^{ik_1 n} &= 1\,. \end{aligned}$$

Данные уравнения, описывающие спектр двухчастичных возбуждений - простейший пример уравнений анзатца Бете.

Находя решения уравнений Бете, мы подставим полученные импульсы в выражение для энергий и найдем собственные значения Гамильтониана.

В силу того, что в Гамильтониане XXZ взаимодействие лишь между ближайщшими соседями, в многочастичном случае не появится фундаментально новых явлений. Спектр будет описываться схожими уравнениями, а все матрицы рассеяния будут факторизоваться в произведение двучастичных.