Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

10. 6-вершинная модель. XXZ гамильтониан

Мы продолжаем изучение уравнения Янга-Бакстера для вершинных моделей.

$$\sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R''^{\sigma_5\sigma_4}_{\mu_2\mu_3} R'^{\mu_2\sigma_3}_{\sigma_2\mu_1} R^{\mu_3\mu_1}_{\sigma_1\sigma_6} = \sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R^{\sigma_4\sigma_3}_{\mu_3\mu_1} R'^{\sigma_5\mu_1}_{\mu_2\sigma_6} R''^{\mu_2\mu_3}_{\sigma_2\sigma_1} .$$

Небольшой комментарий про удобную матричную запись этого и других уравнений и определений. Рассмотрим операторы на пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

Матрица $R : C^2 \to C^2$ действует на базисных векторах $v_\pm$ в пространстве $\mathcal{H}_j \sim C^2$ по правилу

$$R : v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2} \to R^{\sigma_1'\sigma_2'}_{\sigma_1\sigma_2} v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2} .$$

Пусть R_{ij} - оператор, действующий нетривиально на i, j компоненты, $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ и единицей на все остальные. Подействуем операторами с левой и правой частей уравнения Янга-Бакстера на вектора $v^{\sigma_2} \otimes v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_6}$. Тогда само уравнение запишется как равенство матриц, действующих в произведении $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

$$R''_{12} R'_{13} R_{23} = R_{23} R'_{13} R''_{12} .$$

Здесь, например, $R''_{12} = R'' \otimes 1$ и т.д. Трансфер матрица в этих обозначениях имеет вид

$$T = Tr_{\mathcal{H}_0} \left(R_{0,n} \cdots R_{01} \right) = Tr_{\mathcal{H}_0} L .$$

Пространство $\mathcal{H}_0$ выделенное. Оно называется вспомогательным. А пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ называется "квантовым"(на нем действует Гамильтониан соответствующей квантовой одномерной цепочки, в термодинамическом пределе оно становится бесконечномерным и т.д.).

Оператор $L = R_{0,n} \cdots R_{01}$ является матрицей 2×2 - с точки зрения вспомогательного пространства. Однако каждый элемент этой матрицы действует при этом на пространстве $\mathcal{H} = \otimes_1^n C^2$ векторов $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$

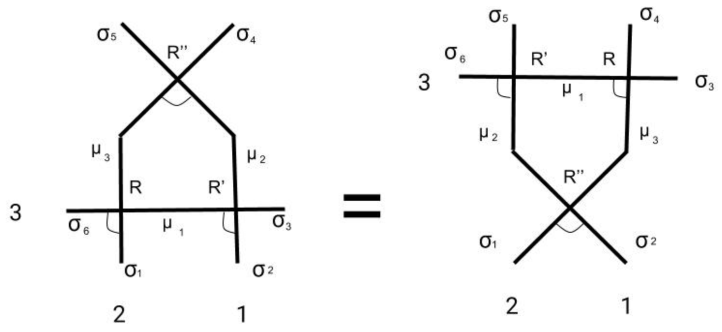

Fig. 1. YBE

размерности $2^n \times 2^n$. В итоге, матрица монодромии (L-оператор) имеет следующий символический вид

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

А трансфер матрица - это след такой матрицы, элементы которой, как мы обсудили выше, являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$

$$T = A + D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Из уравнения Янга-Бакстера следует, что трансфер матрицы T, T' ассоциированные с больцмановскими весами R, R' соответственно, коммутируют

$$R''_{12}(L'_1 \otimes L_2) = (1 \otimes L_2)(L'_1 \otimes 1)R''_{12}, \quad TT' = T'T.$$

Попробуем теперь явно найти решение уравнения Янга-Бакстера. Снова запишем уравнение явно, в компонентах

$$\sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R''^{\sigma_5\sigma_4}_{\mu_2\mu_3} R'^{\mu_2\sigma_3}_{\sigma_2\mu_1} R^{\mu_3\mu_1}_{\sigma_1\sigma_6} = \sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R^{\sigma_4\sigma_3}_{\mu_3\mu_1} R'^{\sigma_5\mu_1}_{\mu_2\sigma_6} R''^{\mu_2\mu_3}_{\sigma_2\sigma_1}.$$

Это уравнение должно выполняться при выборе всех возможных комбинаций для внешних спинов $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$. Всего есть 2^6 нелинейных уравнений, которые не так легко решить. (Любое решение по сути приводит к новой интегрируемой решеточной модели).

Для упрощения задачи, мы наложим условия симметрии (естественные в случае отсутствия магнитного поля) относительно замены знаков всех спинов. Кроме того, наложим условие нейтральности суммы четырех спинов вокруг вершины. И, наконец, чтобы совсем упростить задачу,

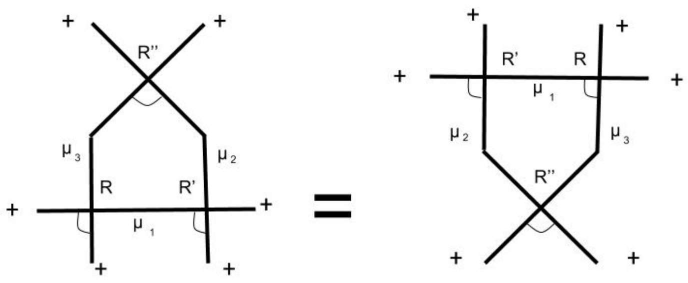

Fig. 2. All μ_j are +1 due to 6 vertex condition.

наложим в данном разделе условие льда, ограничившись случаем шести вершинной модели.[1] Тогда предполагаемые решения зависят от трех параметров и имеют вид

$$R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

Мы будем считать, что матрица R' зависит от параметров a', b', c', а матрица R'' зависит от параметров a'', b'', c''. Более точный вопрос, который мы ставим, при каких условиях на элементы $R,\ R'$ существуют значения a'', b'', c'', так что уравнение Янга-Бакстера выполняется.

В целом необходимо написать уравнения для всех значений внешних спинов 2^6. В силу симметрий шестивершинной модели оказывается, конечно, что число нетривиальных уравнений меньше. Более того, частично некоторыен уравнения выполняются тривиально. Как пример, можно рассмотреть случай (рис. 2), когда все внешние спины равны +1. Тогда уравнение Янга-Бакстера станет просто скалярным тождеством

$$R''^{++}_{++}R'^{++}_{++}R^{++}_{++} = R^{++}_{++}R'^{++}_{++}R''^{++}_{++}, \quad aa'a'' = a''a'a\,.$$

Перебирая все остальные варианты расстановки внешний спинов, можной найти, что все нетривиальные ситуации сводятся к уравнениям на три ситуации. Один из примеров расстановки внешних спинов, который приводит к нетривиальным соотношениям, показан на рисунке 3. Левая

[1]Можно не налагать это условие, изучая случай восьмивершинной модели, в которой есть еще и d компоненты. Но технически уравнение становится немного более сложнее.

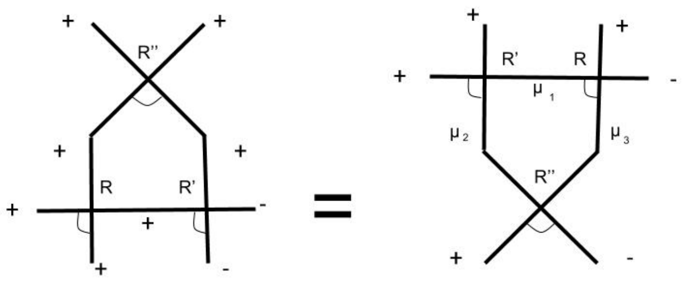

Fig. 3. LHS - one terms. RHS - two terms.

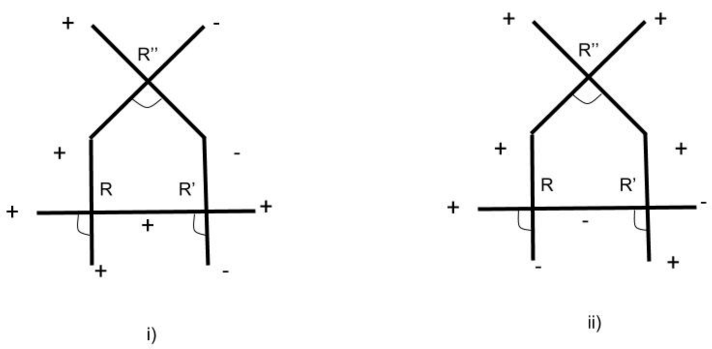

Fig. 4. Remaining non-trivial situations

сторона двух других соотношений обозначены как i), ii) на рисунке 4. Заметим, что в правой стороне суммирование по переменным μ даст два члена.

Перебирая возможные варианты нетривиальных функциональных соотношений, получаем следующие уравнения на параметры R-матриц

$$
\begin{aligned}
&-ac'a'' + bc'b'' + ca'c'' = 0\,, \\
&cc'b'' + (ba' - ab')c'' = 0\,, \\
&-cb'a'' + ca'b'' + bc'c'' = 0\,.
\end{aligned}
$$

Приравнивая к нулю детерминант матрицы коэффициентов при переменных (a'', b'', c'') (для существования нетривиальных решений системы), находим, что элементы R-матриц должны удовлетворять условию

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}=\Delta\,.$$

В силу симметрии, ясно, что и параметры a'', b'', c'' должны удовлетворять этому же условию. Также ясно, что трансфер матрицы T, T' будут коммутировать если выполняется условие выше.

Как и в случае модели Изинга, удобно использовать параметризацию целыми функциями от параметров (λ, u), в которой один из параметров λ определял бы Δ, а вариция второго u не нарушала бы уравнение Янга-Бакстера.[2]

$$\begin{aligned}a(u|\lambda)&=\sin(\lambda-u)\,,\\ b(u|\lambda)&=\sin(u)\,,\\ c(u|\lambda,)&=\sin(\lambda)\,.\end{aligned}$$

Вообще говоря, можно добавить общий множитель $\rho(u|\lambda)$ определяющий нормировку. Он просто сокращается в уравнении Янга-Бакстера. Для простоты мы будем опускать этот параметр, полагая $\rho=1$ (хотя во многих более продвинутых вопросах точное значение скаляра может быть важным).

Параметр u называется спектральным. Как и в случае модели Изинга, критические свойства модели будут зависеть лишь от параметра λ (или $\Delta=2\cos\lambda$).

Можно также записать аналогичное представление в терминах гиперболических синусов. Удобство записей определяется тем, в каком из режимов мы рассматриваем модель - какие из весов a, b, c доминируют в данном режиме. Другая возможная запись данного тригонометрического решения уравнения Янга-Бакстера, заключается в параметризации с помощью e^u, e^λ.

Заметим, что явное выражение для параметризации R-матрицы хорошо еще тем, что в данном виде больцмановские веса удовлетворяют важным соотношениям. Именно, соотношению кроссинга

$$R^{\sigma_3\sigma_4}_{\sigma_1\sigma_2}(\lambda-u)=R^{\sigma_2-\sigma_3}_{\sigma_4-\sigma_1}(u)\,,$$

которое отвечает вращению на угол 90 градусов, и соотношению унитарности

$$R_{12}(u)R_{21}(-u)=a(u)a(-u)\,.$$

[2]Далее, в уравнениях, как и в случае модели Изинга мы полагаем теперь, что параметры λ одинаковы, и, соответственно, опускаем их для простоты записи.

В уравнении Янга-Бакстера спектральные параметры трех матриц удовлетворяют простому условию,

$$u'' = u - u' .$$

Для простоты записи уравнения, удобно выбирать параметры для R-матриц как

$$\begin{aligned} R &= R(u_2 - u_3|\lambda) , \\ R' &= R(u_1 - u_3|\lambda) , \\ R'' &= R(u_1 - u_2|\lambda) . \end{aligned}$$

Тогда уравнение Янга-Бакстера записывается в следующем стандартном виде, опуская общий для всех матриц параметр λ:

$$\begin{aligned} & R_{12}(u_2 - u_3)R_{13}(u_1 - u_3)R_{23}(u_2 - u_3) = \\ & \quad = R_{23}(u_2 - u_3)R_{13}(u_1 - u_3)R_{12}(u_1 - u_2) . \end{aligned}$$

Соответственно, алгебра L-операторов принимает вид

$$R_{12}(u_1 - u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2) ,$$

а, соответственно, трансфер матрицы, составленные из больцмановских весов с одинаковыми параметрами λ (или Δ), но с разными спектральными параметрами, коммутируют как

$$T(u)T(v) = T(v)T(u) .$$

Можно проверить, что в данной параметризации $R(0)$ является простым оператором перестановки. А трансфер матрица в точке $u = 0$ является сдвиговым оператором на 1 шаг. Разложим при трансфер матрицу по спектральному параметру u

$$T^{-1}(0)T(u) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} H_j u^j .$$

Коммутация трансфер матриц означает, что Гамильтонианы H_j коммутируют друг с другом. Данное разложение трансфер матриц обладает свойством, что гамильтонианы коммутативны

$$[H_j, H_{j'}] = 0 .$$

Более того, каждый гамильтониан может быть представлен в виде суммы от 1 до n от локальных интегралов движения. Локальность поледних означает свойство, что каждая плотность гамильтониана зависит лишь от конечного числа рядом стоящих спинов даже в пределе большой решетки.

Точная решаемость модели обеспечивается фактом, что существует большое количество коммутирующих интегралов движения. Конечно, при больших j старшие гамильтонианы будут выражаться через операторы с $j = 1, \ldots, n$, т.е. не будут независимыми.

Легко показать, что H_1 с точностью до нормировки совпадает с Гамильтонианом XXZ цепочки в нулевом магнитном поле

$$H_{XXZ} = -J \sum_{1}^{n} \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) .$$

В частности, трансфер матрица шести вершинной модели коммутирует с H_{XXZ} и имеется система общих собственных векторов.