

Точно-решаемые модели
статистической механики (2018)

Пугай Я.П. ИТФ РАН

Final Task (not necessary for solving)

Deadline May 24, 2018

Рассмотрите $R(u)$ матрицу для восьмивершинной модели.

1. Проверьте явным вычислением любой нетривиальный случай уравнения Янга-Бакстера для этой матрицы.
2. Выпишите и проверьте соотношения кроссинга
3. Выпишите и докажите соотношения унитарности
4. Выпишите трансфер матрицу $T(u)$ модели в терминах R матриц. Проверьте, что первый гамильтониан в разложении $T^{-1}(0)T(u)$ по параметру u совпадает с гамильтонианом XYZ цепочки.
5. Попробуйте выразить корреляционную функцию ближайших соседей через производные от статистической суммы.
6. Рассмотрите угловую трансфер матрицу восьмивершинной модели в режиме, где вес $s(u)$ доминирует. Рассмотрите предел низких температур, в котором угловая трансфер матрица диагонализуется и задача ее вычисления сводится к одномерной проблеме (как это было в модели Изинга). Выпишите выражение для угловой трансфер матрицы в этом пределе (первые нетривиальные члены).

Рассмотрите R матрицу для шестивершинной модели в массивном режиме.

7. (**Partially done in the class**). Рассмотрим нормировку, в которой вес $a=1$, а нормирующий множитель равен $1/k(z)$ и выбран так, что статистическая сумма на ребро равна единице (случай, рассмотренный на лекции). Проверьте явно соотношения унитарности и кроссинга.

8. Решите обратную задачу к упражнению 6. Рассмотрите случай произвольной нормировки R матрицы для шестивершинной модели $1/k(z)$ с неизвестной функцией $k(z)$. Выпишите соотношения унитарности и кроссинга. Потребуйте, чтобы соотношения выглядели как в случае 5. Выпишите функциональные уравнения на функцию $k(z)$. Предположите, что $k(z)$ (напомним, что мы работаем сейчас в мультипликативной записи $z=\exp(iu)$) аналитична в полосе $q^2 < z^2 < q^{-2}$. Найдите решения функциональных соотношений. Проверьте, что статистическая сумма на узел в самом деле задается $k(z)$.
9. Рассмотрите в шестивершинной модели задачу вычисления двухточечных корреляционных функций. Пусть нас интересует ситуация, когда спины на двух последовательных вертикальных рёбер (расположенных рядом по горизонтали) фиксированы как σ_j и σ_{j+1} . Перепишите вероятность такой конфигурации $P_{\sigma_j \sigma_{j+1}}^{(i)}$ через следы углового гамильтониана и вершинные операторы. Подумайте, какого рода нормировочные условия необходимо наложить на вершинные операторы чтобы сумма вероятностей n -точечных функций по одному из спинов сводилась к $n - 1$ -точечным функциям?
10. Рассмотрите неоднородный случай для предыдущей ситуации, в котором ищется след от 4 вершинных операторов. Напишите разностные уравнения на такие величины (аналоги уравнения Книжника-замолодчикова для четырёхточечной функции). Попробуйте написать q -KZ уравнения общего вида.
11. Рассмотрите уравнение q -KZ для следа двух вершинных операторов. Обозначим его через $F_{\sigma\sigma'}(z)$. Вводя явные выражения для компонент R матриц, запишите разностное уравнение для компоненты $f(z) = F_{+-}(z) + F_{-+}(z)$. Решите данное уравнение, предполагая простейшие аналитические свойства решений.
12. Используя результаты предыдущего упражнения, дополните его свойством $g(z) = F_{+-}(z) - F_{-+}(z)$, $g(z) = f(-z)$. (Последнее равенство можно вывести из явного вида вершинных операторов, записанных как произведение больцмановских весов). Выпишите явно двухточечный коррелятор для однородного случая (случай $z=-q$). Получите ответ для спонтанной намагниченности в шестивершинной модели. Сравните полученный ответ с ответом для модели Изинга.

13. Прделайте упражнение 8, но уже для 8 вершинной модели.
14. Сделайте преобразование Йордана Вигнера для XXZ цепочки. В фермионном представлении определите псевдовакуум, операторы рождения псевдочастиц. Попробуйте диагонализировать гамильтониан и вывести соответствующие уравнения Бете анзатца в этих обозначениях.
15. Рассмотрите угловую трансфер матрицу для модели Изинга. Запишите ее через фермионы Йордана Вигнера. Попробуйте диагонализировать ее.