Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

9. Результаты модели Изинга. Вершинные модели.

Deadline May 4, 2018

1. **Done in the class**. Точная ренорм группа в 1-D модели Изинга. Чтобы проиллюстрировать идею ренорм группы, рассмотрим одномерную модель Изинга. Пусть у нас имеется решетка с n узлами и периодическими граничными условиями.

$$Z(n, K, h) = \sum_{\sigma} e^{K \sum_1^n \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sum_1^n \sigma_i} .$$

Мы хотим перейти к решетке, в которой бы шаг решетки 'a' был в два раза больше '2a', а число узлов n в два раза меньше. Для этого пропробуйте отсуммировать все четные спины $\sigma_2, \ldots$. Переменные с нечетными иднексами $\sigma_1, \sigma_3, \ldots$ станут новыми спинами в преобразованной модели. Т.е. мы хотим сделать ренорм групповое преобразование с параметром растяжения $b = 2$ в $d = 1$.

$$n' = b^{-d} n \, , a' = ba \, .$$

После суммирования по четным переменным, получим

$$Z(n, K, h) = e^{ng} Z'(n', K', h') \, .$$

Наша задача перенормировки - представить Гамильтониан H' преобразованной задачи в виде исходного Гамильтонина, но, возможно, с другими параметрами K', h', являющихся функциями от K, h и b:

$$H' = -K' \sum_{i \ odd} \sigma_i \sigma_{i+2} - h \sum_{i \ odd} \sigma_i$$

В одномерной модели изинга такое преобразование возможно сделать точно. Найдите преобразование ренормгруппы для этого случая.э В двумерном и более сложных случаях структура Гамильтониана будет меняться - необходимо вводить дополнительные члены, которых не было в исходном описании, анализировать их вклады.

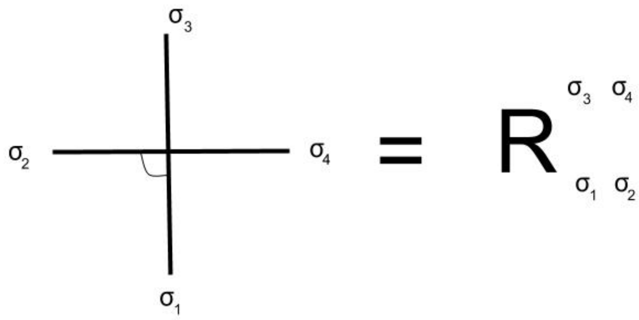

Fig. 1. R матрица как больцмановский вес.

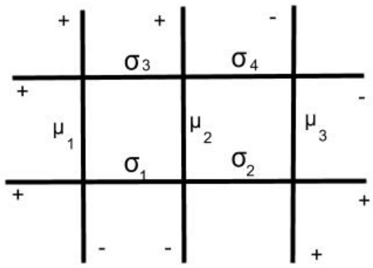

Fig. 2. Пример конфигурации спинов на ребрах квадратной решетки.

2. **Done in the class**. Используя результаты из предыдущего упражнения, изучите неподвижные точки ренормгруппового преобразования, обсудите поток ренормгруппы в данном случае.

3. Рассмотрите удвоенную модель Изинга как вершинную модель. Попробуйте проверить, что уравнение звезда-треугольник приводит к уравнению Янга-Бакстера.

4. Определения больцмановских весов через R матрицу. Пусть спины в вершинной модели живут на ребрах и принимают значения $\sigma = \pm 1$. А больцмановские веса модели определены для совокупности спинов вокруг узла (вершины) и заданы матрицей 4×4

$$R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_3\sigma_4} = e^{-\varepsilon(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)/kT}\,.$$

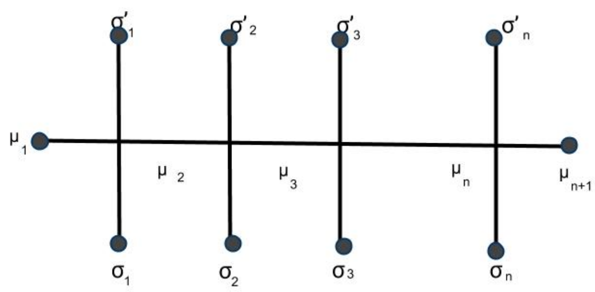

Fig. 3. L-operator. Внешние спины, показанные точками, зафиксированы.

Рассмотрите решетку малого размера 2×3, показанную на рисунке 2. Пусть граничные условия зафиксированы, как показано на рисунке (внешние ребра со спинами $\pm$). Запишите явно статистическую сумму данной решетки.

5. По аналогии с предыдущим упражнением, запишите явно матрицу монодромии $L_{\mu_1 \mu_{n+1}}$ (см. рис. 3). Это статистическая сумма с фиксированными внешними спинами $\mu_1, \mu_{n+1}, \{\sigma\}, \{\sigma'\}$.

   Роль спинов μ_1, μ_{n+1} и $\{\sigma\}, \{\sigma'\}$ интерпретируется различным образом. Спины $\{\sigma\} \in \mathcal{H}$ образуют квантовое пространство. На этом пространстве действуют элементу матрицы монодромии, трансфер матрица. Переменные же μ_j относятся к вспомогательному пространству. В частности, матрица

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

   с индексами μ_1, μ_{n+1} интерпретируется как матрица 2×2, состоящая из операторов, действующих на спиновые переменные $L_{++} = A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и т.д.

6. Рассмотрите решетку с периодическими граничными условиями. Определите трансфер матрицу модели. Запишите статистическую сумму через трансфер матрицу и ее собственные значения. Основываясь на предыдущем упражнении, запишите трансфер матрицу явно через веса R. Запишите связь между матрицей монодромии и трансфер матрицей.

Fig. 4. Условие коммутации трансфер матриц.

7. Запишите явно в терминах матриц $R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}$ уравнение Янга-Бакстера, представленное на рисунке 4. Именно. Проставьте все спины - внешние, которые фиксированы для обоих фигур, и внутренние, по которым идет суммирование. Выпишите произведения больцмановских весов, проставьте суммы по тем переменным, по которым идет матричное произведение.

8. Рассмотрите трансфер матрицы T, T', построеные из весов R и R' соответственно. Покажите, что такие трансфер матрицы будут коммутировать, если найдется соответствующая R'' матрица, такая, что выполнится аналог уравнение Яга-Бакстера.

9. Выпишите коммутационные соотношения для матриц монодромии, L, L', построеных из весов R и R' соответственно. .

10. Мы рассмотрим действие операторов на пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

Пусть $v_\pm$ два базисных вектора в $\mathcal{H}_j \sim C^2$. Например, можно думать, что

$$v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $R : C^2 \to C^2$ как оператор, действующий по правилу

$$R : v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2} \to R_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'} v^{\sigma_1} \otimes v^{\sigma_2}.$$

Удобно обозначать через R_{ij} оператор, который действует нетривиально на i, j компоненты, $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ и единицей на все остальные.

Покажите, что уравнение Янга-Бакстера запишется как

$$R''_{12}R'_{13}R_{23} = R_{23}R'_{13}R''_{12}$$

Покажите, что трансфер матрица записывается как

$$T = Tr_{\mathcal{H}_0}\left(R_{0,n}\cdots R_{01}\right) = Tr_{\mathcal{H}_0}L\,.$$

Оператор $L = R_{0,n}\cdots R_{01}$ является матрицей 2×2. Т.е. имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

А трансфер матрица - это след такой матрицы, элементы которой являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$.

Покажите, что из уравнения Янга-Бакстера следует, что

$$R''_{12}(L'_1\otimes L_2) = (1\otimes L_2)(L'_1\otimes 1)R''_{12}\,,\quad TT' = T'T\,.$$