Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

8. Свободная энергия и корреляторы

Deadline April 27, 2018

Мы продолжаем рассматривать свободную энергию и корреляторы в двумерной модели Изинга, используя метод диагонализации ряд-в-ряд трансфер матрицы с помощью свободных фермионов.

Мы используем определения

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\,,\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_i^{\pm} &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{\pm} \otimes \cdots \otimes 1 \\ \sigma_i^{z} &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{z} \otimes \cdots \otimes 1\,. \end{aligned}$$

В частности, преобразование Йордана-Вигнера к алгебре фермионных операторов выглядит как

$$\begin{aligned} C_j &= \left(e^{i\pi \sum_{i<j} \sigma_j^+ \sigma_j^-}\right) \sigma_j^-\,, \\ C_j^+ &= \left(e^{-i\pi \sum_{i<j} \sigma_j^+ \sigma_j^-}\right) \sigma_j^+\,. \end{aligned}$$

где операторы $C_j, C_j^\dagger$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям алгебры свободных фермионов.

1. **Done in the class**. Данное упражнение уже в большей части было сделано в предыдущем листке. Минимальное усложнение - учет того, что в общем случае операторы, из которых состоит трансфер матрица, не коммутируют друг с другом и должны рассматриваться для общих K, L раздельно. Используя ответы из предыдущего задания, выпишите преобразование Йордана-Вигнера для трансфер матрицы

$$\begin{aligned} T &= V_1 V_2\,, \\ V_1 &= e^{L^* \sum \sigma_j^x}\,, \\ V_2 &= e^{K \sum \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z}\,, \end{aligned}$$

и сделайте преобразования Фурье

$$\eta_q = \frac{1}{n^{1/2}} e^{-i\pi/4} \sum_{j=-n}^{n-1} C_j e^{iqj} \, .$$

где снова $q = 2\pi k/n$, предполагая для простоты, что n четное. Выпишите явно трансфер матрицу через новые переменные η_q. Вы должны получить (игнорируя граничные члены, которые могут быть аккуратно учтены, но опущены для простоты)

$$V_1 = \prod_{0<q<\pi} \exp L^* v_1(q)$$
$$V_2 = \prod_{0<q<\pi} \exp K v_2(q)$$

где

$$v_1(q) = 2(1 - \eta_q^\dagger \eta_q - \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q}) \, ,$$
$$v_2(q) = (\eta_q^\dagger \eta_{-q}^\dagger + \eta_q \eta_{-q}) 2i \sin q - 2(1 - \eta_q^\dagger \eta_q - \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q}) \cos q \, ,$$

2. **Done in the class**. Вычислите действие оператора $v_1(q)$ при действии на те вектора, которые дают нетривиальный вклад

$$|1\rangle = |vac\rangle \, ,$$
$$|2\rangle = \eta_q^\dagger \eta_{-q}^\dagger |vac\rangle \, ,$$
$$|3\rangle = \eta_q^\dagger |vac\rangle \, ,$$
$$|4\rangle = \eta_{-q}^\dagger |vac\rangle \, .$$

Найдите матрицу $\exp L^* v_1(q)$ в виде матрицы 4×4.

3. **Done in the class**. Вычислите действие оператора $v_2(q)$ при действии на те вектора, которые дают нетривиальный вклад

$$|1\rangle = |vac\rangle \, ,$$
$$|2\rangle = \eta_q^\dagger \eta_{-q}^\dagger |vac\rangle \, ,$$
$$|3\rangle = \eta_q^\dagger |vac\rangle \, ,$$
$$|4\rangle = \eta_{-q}^\dagger |vac\rangle \, .$$

Найдите матрицу $\exp K v_2(q)$ при действии на эти вектора в виде матрицы 4×4.

4. **Done in the class**. Используя результаты предыдущих вычислений, выпишите матрицу $\exp L^* v_1(q) \exp K v_2(q)$ в виде обычной матрицы 4×4. Диагонализуйте эту матрицу и найдите соответствующее значение энергии ε_k, игнорируя вклад граничных членов.

5. Используя предыдущие ответы, выпишите свободную энергию модели Изинга на конечной решетке в терминах ε_k. Найдите свободную энергию модели Изинга в термодинамическом пределе.

6. Найдите вид свободной энергии двумерной модели Изинга (в термодинамическом пределе) вблизи критической точки - положив для простоты $K = L$ и измеряя отклонение от критичности параметром $L - L^*$. Вы должны найти

$$F \sim (L - L^*)^2 \log(L - L^*)$$

Вычислите показатель α.

7. Положите для простоты $K = L$. Рассмотрите гамильтониан

$$H = -\frac{1}{\sinh 2L} \log\left(T/(2\sinh 2L)^{n/2}\right) .$$

Из явного вида собственных значений ε_q покажите, что в пределе малых q вблизи критической точки энергия возбужденных состояний имеет ожидаемый для одночастичных состояний вид

$$E^2(q) = q^2 + m^2$$

где $m = 2(L - L^*)/\sinh(2L)$

8. Корреляторы в модели Изинга сводятся к вычислению матричного элемента

$$\langle\psi_0|\sigma_j^z\sigma_{j'}^z|\psi_0\rangle .$$

Где ваккумный вектор $|\psi_0\rangle$ аннигилиуется операторами ψ_q. Мы должны найти матричный элемент вида

$$\sigma_j^z\sigma_{j'}^z = (C_j^\dagger + C_j)e^{\pi i \sum_j^{j'-1} C_k C_k^\dagger}(C_{j'} + C_{j'}^\dagger)$$

Введем обозначения

$$C_j^z = C_j^\dagger + C_j, \quad C_j^y = C_j^\dagger - C_j .$$

Покажите, что

$$\sigma_j^z\sigma_{j'}^z = C_j^y C_{j+1}^z C_{j+1}^y C_{j+2}^z \cdots C_{j'}^z .$$

9. Используя преобразование Боголюбова с некоторым углом ϕ_q (вычисляемым из процедуры диагонализации матриц $V_2(q)V_1(q)$), можно получить следующее представление для операторов из преобразования Йордана-Вигнера

$$C_j = \frac{1}{n^{1/2}} e^{-i\pi/4} \sum e^{iqj}(\cos\phi_q \psi_q - \sin\phi_q \psi_{-q}^\dagger) .$$

Для применения Теоремы Вика, нужно знать двухточечные функции фермионных полей C^z, C^y. Вычислите, что

$$\langle\psi_0|C^z_j C^z_{j'}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|C^y_j C^y_{j'}|\psi_0\rangle = 0\,, \quad j \neq j'\,.$$

Найдите явно нетривиальную величину

$$\langle\psi_0|C^y_j C^z_{j'}|\psi_0\rangle\,.$$

Вы должны получить

$$-\frac{1}{n}\sum_q e^{i\pi q(j-j')} e^{-2i\phi_q}\,.$$

10. Пусть

$$a_{i,j} = \langle\psi_0|C^y_i C^z_{j+1}|\psi_0\rangle\,.$$

Попробуйте вычислить (записать теорему Вика) коррелятор

$$\langle\psi_0|\sigma^z_j \sigma^z_{j'}|\psi_0\rangle\,.$$

в терминах $a_{i,j}$. Именно, в теории свободных полей матричный элемент произведения операторов A_i сводится к сумме произведений попарных матричных элементов

$$\langle\psi_0|A_1\cdots A_n|\psi_0\rangle = \sum_{all\ pairings}(-1)^p \prod_{all\ pairs}\langle\psi_0|A_i A_j|\psi_0\rangle\,.$$

Где p-знак перестановки для заданной системы спариваний, необходимой для того, чтобы привести операторы в данные пары из начального расположения. (Если вы не знаете теорему Вика, просто попробуйте написать явно этот матричный элемент для малых значений разности $j' - j$).