Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

7. Свободные фермионы и преобразование Jordan-Wigner

Deadline April 21, 2018

Мы продолжаем рассматривать двумерную модель Изинга в нулевом магнитном поле с параметрами взаимодействия K, L. Матрицы, Очень простой метод диагонализации ряд-в-ряд трансфер матрицы - переход к свободным фермионам с помощью преобразования Йордана-Вигнера.

В случае $K << 1$, $L >> 1$ ряд в ряд трансфер матрица определяется простым одномерным квантовым Гамильтонианом (модель Изинга в поперечном магнитном поле)

$$H = K\sum \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + L^* \sum \sigma_j^x$$

где

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Диагонализация такого оператора во многом проще, чем диагонализация трансфер матрицы для общих параметров K, L. Мы попробуем переписать Гамильтониан в терминах алгебры свободных фермионов $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, удовлетворяющих каноническим антикоммутационным соотношениям вида

$$\{\psi_j^\dagger, \psi_k\} = \delta_{i,j}, \quad \{\psi_j, \psi_k\} = 0, \quad \{\psi_j^\dagger, \psi_k^\dagger\} = 0.$$

Заметим, что квадрат каждого такого оператора является 0

$$\psi_j^2 = 0, \quad {\psi_j^\dagger}^2 = 0$$

Определим представление старшего веса, задав вакуумный вектор условием

$$\psi_j |vac\rangle = 0, j \in \{1, \dots, n\}$$

с нормировкой

$$\langle vac|vac\rangle = 1$$

Тогда пространство представлений с данным старшим вектором нарождается действием операторов $\psi^\dagger$.

1. **Done in the class**. Покажите, что оператор $\psi_j^\dagger \psi_j$ является положительным эрмитовым оператором с собственными значениями $\{0, 1\}$. Покажите, что операторы $\psi_j^\dagger \psi_j$ и $\psi_i^\dagger \psi_i$ коммутируют, а поэтому можно найти их общие собственные векторы.

2. **Done in the class**. Покажите, что оператор ψ_j является оператором, понижающим собственное значение оператора числа частиц

$$N = \sum \psi_j^\dagger \psi_j \,,$$

на единицу, а оператор $\psi_j^\dagger$ увеличивает собственное значение на единицу. Найдите собственные значения, скалярные произведения, общее число базисных векторов пространства представлений вида

$$|\psi\rangle = \psi_1^{\varepsilon_1} \cdots \psi_n^{\varepsilon_n} |vac\rangle \,.$$

3. Для векторов вида ψ найдите собственные значения Гамильтониана свободных фермионов вида

$$H_{free} = \sum \epsilon_j \psi_j^\dagger \psi_j \,.$$

Рассмотрите квадратичный Гамильтониан немного более общего вида

$$H = \sum \epsilon_{j,k} \eta_j^\dagger \eta_k \,,$$

где η_k - операторы алгебры свободных фермионов. Попробуйте диагонализовать такой квадратичный оператор явно, сведя к H_{free} линейным преобразованием для каждой пары $(\eta_j, \eta_j^\dagger) \to (\psi_j, \psi^\dagger)$. Выпишите условия, которым такое линейное преобразование должно удовлетворять.

4. Рассмотрите операторы вида

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,,$$
$$\sigma^- = \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

Найдите алгебру (коммутационные соотношения) операторов $\sigma^\pm, \sigma^z$ и покажите, что данные матрицы являются двумерным представлением алгебры su(2). Как реализованы вектора такого представления? Вычислите явно соотношение

$$\exp(i\pi\sigma^+\sigma^-) = -\sigma^z \,.$$

Рассмотрите операторы, действующие нетривиально на i-ую компоненту в тензорном произведении двумерных представлений

$$\sigma_i^{\pm} = 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{\pm} \otimes \cdots \otimes 1$$
$$\sigma_i^{z} = 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{z} \otimes \cdots \otimes 1\,.$$

Используя предыдущие вычисления, напишите соотношения в алгебре таких операторов ((анти)коммутационные соотношения, выражения для квадратов операторов и т.д.).

5. **Done in the class**. Рассмотрите преобразование Йордана-Вигнера

$$C_j = \left(e^{i\pi\sum_{i<j}\sigma_j^+\sigma_j^-}\right)\sigma_j^-\,,$$
$$C_j^+ = \left(e^{-i\pi\sum_{i<j}\sigma_j^+\sigma_j^-}\right)\sigma_j^+\,.$$

Покажите явным вычислением, что операторы $C_j, C_j^\dagger$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям алгебры свободных фермионов.

6. **Done in the class**. Вычислите обратное преобразование между матрицами Паули и свободными фермионами и покажите, что

$$\sigma_j^+ = \left(e^{i\pi\sum_{i<j}C_j^+C_j}\right)C_j^+\,,$$
$$\sigma_j^- = \left(e^{-i\pi\sum_{i<j}C_j^+C_j}\right)C_j\,,$$
$$\sigma_j^z = 1 - 2C_j^+C_j\,.$$

7. Из явного вида преобразования Йордана-Вигнера, покажите, что

$$\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- = C_j^+C_{j+1}\,,$$
$$\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ = C_j^+C_{j+1}^+\,,$$
$$\sigma_j^-\sigma_{j+1}^- = -C_jC_{j+1}\,,$$

Сделайте замену в Гамильтониане модели Изинга

$$\sigma^z \longrightarrow -\sigma^x\,, \sigma^x \longrightarrow \sigma^z\,, \sigma^y \longrightarrow \sigma^y\,.$$

Какому вращению в пространстве матриц Паули эта замена соответствует? После этой замены рассмотрите

$$H = K\sum\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + L^*\sum\sigma_j^z$$

и представьте его в терминах свободных фермионов C_j.

8. Используя предыдущее вычисление, сделайте преобразование Фурье

$$\eta_q = \frac{1}{n^{1/2}} e^{-i\pi/4} \sum_{j=-n}^{n-1} C_j e^{iqj} \,.$$

$q = 2\pi k/n$, предполагая для простоты, что n четное и выпишите Гамильтониан через новые переменные η_q. Для простоты игнорируйте граничные условия.

9. Попробуйте диагонализовать получившийся Гамильтониан, используя преобразование Богололюбова.

$$\begin{aligned} \xi_q &= \cos\phi_q \;\eta_q + \sin\phi_q \;\eta_{-q} \,, \\ \xi_{-q} &= \cos\phi_q \;\eta_{-q} - \sin\phi_q \;\eta_q \,, \end{aligned}$$

и привести Гамильтониан к виду

$$H = -\sum \epsilon_q \left(\xi_q^\dagger \xi_q - \frac{1}{2} \right) .$$