Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

6. Намагниченность и угловые трансфер матрицы

Deadline April 14, 2018

Рассмотрите удвоенную модель Изинга с больцмановскими весами, определяющими взаимодействия следующих за ближайшими соседями

Использоуейте параметризацию

$$e^{-2K} = \frac{snh(u)}{snh(\lambda)}\,,$$
$$e^{-2L} = \frac{snh(\lambda - u)}{snh(\lambda)}\,,$$

где

$$snh(u) = -isn(u)\,.$$

1. **(Done in the class)**. Используя явные выражения для больцмановских весов в терминах констант связи K, L, проверьте Уравнение Янга-Бакстера в IRF форме, показанное на рисунке. Выпишите явно уравнение для больцмановских весов

   $$w\left(\begin{matrix} d & c \\ a & b \end{matrix}\middle| u\right) = e^{Kac+Lbd}\,.$$

   Проверьте тривиальный случай уравнения Янга-Бакстера, например, когда внешние спины равны 1.

2. Рассмотрите какой-либо нетривиальный случай (беря внешние спины не равными) уравнения Янга-Бакстера и проверьте его правильность. Можно свести проверку к уравнению звезда-треугольник, либо действовать напрямую, используя тождества для эллиптических функций.

3. **(Done in the class)**. Кроссинг. Проверьте преборазование кроссинга, которое сводится к повороту решетки на 90 градусов (если одно из направлений на решетке - пространство, а второе - время, то мы меняем их местами). Найдите связь больцмановских весов в

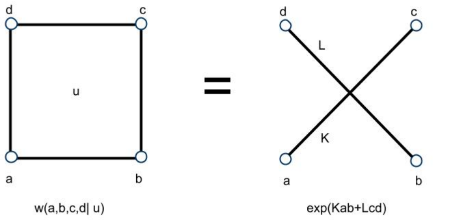

Fig. 1. Удвоенная модель Изинга .

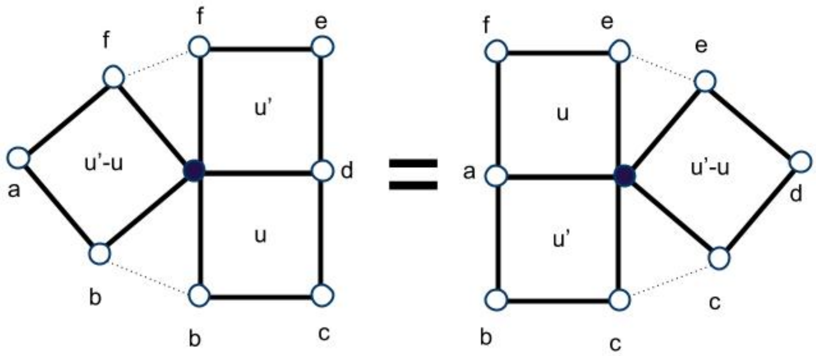

Fig. 2. Уравнение Янга-Бакстера в IRF форме.

результате такого преобрзования в терминах переменных K, L и в терминах u, q.

Вы должны получить уравнение вида

$$w\left(\begin{matrix} d & c \\ a & b \end{matrix}\middle| u\right) = w\left(\begin{matrix} c & b \\ d & a \end{matrix}\middle| \lambda - u\right).$$

4. **(Done in the class)**. Рассмотрите неоднородную ряд-в-ряд трансфер матрицу, состоящую из произведения больцмановских весов вдоль линии

$$T(\{u_j\})^{b_1,b_2,\dots}_{a_1,a_2,\dots} = w\left(\begin{matrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\middle| u_1\right) w\left(\begin{matrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{matrix}\middle| u_2\right)\cdots$$

Используя уравнение Янга-Бакстера, проверьте, при каких соотношениях для спектральных параметров трансфер матрицы $T(\{u_j\})$ и $T(\{v_j\})$ коммутируют.

5. **(Done in the class)**. Кроссинг. Рассмотрите угловую трансфер матрицу $A(u)$ ассоциированную с верхним правым квадрантом решетки. Также рассмотрите угловую трансфер матрицу $B(u)$, ассоциированную с верхним левым квадрантом решетки. Выпишите явно выражения для этих матриц в терминах больцмановских весов (символически). Примените преобразование кроссинга и найдите связь между матрицами A и B.

6. Рассмотрите произведение трансфер матриц $B(\lambda - v)$ и $A(u)$. Фиксируйте условие на бесконечности как в одном из основным состояний. Покажите, что произведение $B(\lambda - v)A(u)$ является функцией от $u + v$. Приведите аргументы, что

$$A(u) = const\, \exp(uH_c)\,,$$

где H_c не зависит от u.

7. Рассмотрите предел $L \to \infty$, при фиксированном K. Покажите, что спины вдоль одной диагонали станвятся равными, а угловая трансфер матрица представляется в виде 1-мерной конфигурации

$$A(u) = const\, \exp\left(K \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\sigma_j \sigma_{j+2} \right)$$

8. Используя результаты предыдущего упражнения, вычислите первые нетривиальные члены разложения для вероятностей центрального спина быть ± 1 при условии, что на бесконечности все спины фиксированы $+1$.

$$Z_{++} \sim Tr_{H^+}\left(A(u)A(\lambda - u)A(u)A(\lambda - u)\right)$$

$$Z_{-+} \sim Tr_{H^-}\left(A(u)A(\lambda - u)A(u)A(\lambda - u)\right)$$

Используйте условие кроссинг симметрии и экспоненциальную форму для угловой трансфер матрицы.

Вычислите первые нетривиальные члены в нормированных на $Z_{++} + Z_{-+}$ вероятностях. Найдите разложение намагниченности в модели Изинга в терминах q при малых $q = e^{-2\pi\lambda/I}$.

9. Сравните результаты предыдущего упражнения со следующим точным результатом вычисления 1-мерной конфигурации

$$Z_{++} = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{\infty}(1 + q^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{\infty}(1 - q^{k+\frac{1}{2}})\,,$$

$$Z_{-+} = \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{\infty}(1+q^{k+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{k+\frac{1}{2}})\,,$$

10. Характеры неприводимых представлений алгебры Вирасоро для критической модели Изинга (частный случай моделей Белавина-Полякова-Замолодчикова при $p = 3$). Общее выражение для характеров неприводимых полностью вырожденных представлений бесконечномерной алгебры Вирасово в соответствии с Фейгин-Фукс, Rocha-Caridi задается формулами

$$\chi_{r,s} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{\Delta_{2pj+r,s}} - q^{\Delta_{2pj+r,-s}}\right)$$

Где $\Delta_{r,s}$ (спектр конформных размерностей) задается так называемой формулой Каца

$$\Delta_{r,s} = \frac{(r(m+1)-sm)^2-1}{4p(p+1)}$$

В рассматриваемом нами случае $p = 3$. Ситуация, когда мы вычисляем случай Z_{++} соответствует $r = 1, s = 1$, а случай Z_{-+} соответствует $r = 2, s = 1$.

Например, с точностью до несущественной константы, мы можем взять

$$\chi_{1,1} - \chi_{2,1} = \frac{1}{\prod_1^{\infty}(1-q^n)}\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{\frac{(24k+1)^2-1}{48}} - q^{\frac{(24k+7)^2-1}{48}} + q^{\frac{(24k+13)^2-1}{48}} - q^{\frac{(24k+19)^2-1}{48}}\right).$$

Используя формулу тройного произведения Якоби, попробуйте показать, что

$$\chi_{1,1}(q) - \chi_{2,1}(q) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{k+\frac{1}{2}})\,,$$
$$\chi_{1,1}(q) + \chi_{2,1}(q) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+q^{k+\frac{1}{2}})\,.$$

Если вы сумели доказать эти тождества, выразите выражения для следов уговых трансфер матриц через $\chi_{r,s}(q)$ и напишите выражение для намагниченности в модели Изинга. Вы должны получить выражение

$$\langle\sigma\rangle = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1-q^{k+\frac{1}{2}}}{1+q^{k+\frac{1}{2}}}$$