Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

5. Решение для $k < 1$ и тета функции

Deadline April 4, 2018

Определим тета функции (Якоби - это частный случай тета функций Римана) явными выражениями

$$
\begin{aligned}
\theta_1(u) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin u \prod_{n=1}^{\infty}\left((1-2q^{2n}\cos 2u+q^{4n})(1-q^{2n})\right)\,,\\
\theta_4(u) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left((1-2q^{2n-1}\cos 2u+q^{2n(2n-1)})(1-q^{2n})\right)\,,\\
\theta_2(u) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos u \prod_{n=1}^{\infty}\left((1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n})(1-q^{2n})\right)\,,\\
\theta_3(u) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left((1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{2n(2n-1)})(1-q^{2n})\right)\,,
\end{aligned}
$$

Здесь предполагается, что $0 < q < 1$.

1. **Done in class**. Проверьте свойства квазипериодичности тета функций. Мы используем здесь обозначения $q = e^{i\pi\tau}$.

   i)
   $$\theta_1(u+\frac{\pi}{2}) = \theta_2(u)\,,$$

   ii)
   $$\theta_1(u+\frac{\pi\tau}{2}) = iq^{-1/4}e^{-iu}\theta_4(u)$$

   iii)
   $$\theta_1(u+\pi\tau) = -q^{-1}e^{-2iu}\theta_1(u)$$

2. **Done in class**. Изучите разложение тета функций в ряд при малых q, e^{iu}.

   i) Используя свойство антипериодичности $\theta_1(u+\pi) = -\theta_1(u)$ функции $\theta_1(u)$ при сдвиге на π по параметру u напишите разложение $\theta_1(u)$ в ряд Фурье

   $$\theta_1(u) = const \sum a_n e^{(2n+1)u}$$

ii) Используя квазипериодичность по $\pi\tau$, выведите рекурсионное соотношение для коэффициентов разложения выше и найдите их решение с точностью до общей нормировки.

3. Фиксируйте константу в предыдущем упражнении и выведите тождество тройного произведения Якоби

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}z)(1+q^{2m-1}z^{-1})(1-q^{2m}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

$(0 < q < 1)$, связывающее представление тета функции в виде бесконечного произведения и представление в виде ряда

$$\theta_1(u) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u} .$$

4. **Done in class**. Докажите тождество Римана для тета функций

$$\begin{aligned} &\theta_1(u+x)\theta_1(u-x)\theta_1(v+y)\theta_1(v-y)- \\ &-\theta_1(u+y)\theta_1(u-y)\theta_1(v+x)\theta_1(v-x) = \\ &= \theta_1(x-y)\theta_1(x+y)\theta_1(u+v)\theta_1(u-v) . \end{aligned}$$

Для этого разделите обе части на RHS. Рассмотрите соответствующее выражение LHS/RHS как функцию одного из параметров (u, например, или же v, x, y). Проверьте что получившаяся функция от u - двоякопериодическая и при этом не имеет полюсов. Используйте теорему о том, что двоякопериодическая, аналитическая в параллелограмме (и на границе) периодов функция является константой. Найдите, эту константу и завершите доказательство тождества.

5. Пусть функция является двояко квазипериодичной

$$f(u+2I) = (-1)^s f(u) \, , f(u+2iI') = (-1)^r f(u) \, ,$$

с $I, I' \in R$, и имеет на прямоугольнике периодов (прямоугольник в комплексной плоскости размером 2I, 2I') n полюсов в известных точках

$$\{u_1, \ldots, u_n\} .$$

Докажите, что функция может быть представлена в виде

$$f(u) = const \times e^{i\lambda u} \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_1(\frac{\pi}{2I}(u-v_j))}{\theta_1(\frac{\pi}{2I}(u-u_j))}$$

где $q = e^{-\pi \frac{I'}{I}}$

$$\sum v_j = \sum u_j + (r+2m)I - i(s+2n)I'$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2I}(s+2n)$$

6. Определим эллиптические функции Якоби $sn(u), cn(u), dn(u)$ с полупериодами I, I' в виде отношения тета функций

$$\begin{aligned}
sn(u) &= k^{-\frac{1}{2}} \frac{\theta_1(\frac{\pi}{2I}u)}{\theta_4(\frac{\pi}{2I}u)}\,, \\
cn(u) &= (k'/k)^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_2(\frac{\pi}{2I}u)}{\theta_4(\frac{\pi}{2I}u)}\,, \\
dn(u) &= k'^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_3(\frac{\pi}{2I}u)}{\theta_4(\frac{\pi}{2I}u)}\,,
\end{aligned}$$

где $q = e^{-\pi I'/I}$ и

$$\begin{aligned}
k &= 4q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-q^{2n})}{(1+q^{2n-1})} \right)^4\,, \\
k' &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-q^{2n-1})}{(1+q^{2n-1})} \right)^4\,.
\end{aligned}$$

Выведите тождества для эллиптических функций

$$\begin{aligned}
sn^2 u + cn^2 u &= 1\,, \\
k^2 sn^2 u + dn^2 u &= 1\,.
\end{aligned}$$

Один из способов - доказать сначала, что

$$\theta_2^2(0)\theta_4^2(u) - \theta_4^2(0)\theta_2^2(u) = \theta_3^2(0)\theta_1^2(u)\,.$$

Это легко делается путем изучения свойств периодичности LHS и RHS, и явных нулей, после чего применяется теорема Лиувилля. А затем нужно использовать точные выражения для k, k', чтобы сравнить их с тета-константами $\theta_4(0)$ и т.д. Вторая формула (с dn(u)) может быть тогда получена путем сдвижки по τ. Но можно доказывать формулу любым удобным для вас способом.

7. Рассмотрите параметризацию диагональ-диагональ трансфер матриц в офф критическом режиме $k < 1$

$$
\begin{aligned}
&\sinh 2K = i\ sn(iu)\,,\\
&\sinh 2L = (ki\ sn(iu))^{-1}\,,
\end{aligned}
$$

с помошью эллиптических функций Якоби с параметром k. Как и в случае $k = 1$ данная параметризация хороша тем, что $\exp(2K)$ и $\exp(2L)$, а значит и матрицы V имеют простую аналитическую структуру по параметру u - это отношения целых функций, задаваемых суммой произведений тета функций. Найдите явные выражения для $e^{\pm 2K}$, $e^{\pm 2K}$.

8. Покажите, что уравнения на собственные значения выглядят теперь как

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(u+I')\Lambda(u) = (-\frac{2}{k\ sn(iu)})^n + (-2\ sn(iu))^n r\,,\\
&\Lambda(u+2I') = r\Lambda(u)\,,\\
&\Lambda(u-2iI) = \Lambda(u)\,.
\end{aligned}
$$

9. Обоснуйте анзатц

$$
\Lambda(u) = const e^{\lambda u}\frac{1}{(\theta_1(\frac{i\pi}{2I}u)\theta_4(\frac{i\pi}{2I}u)}\prod_{j=1}^{2p}\theta_1(\frac{i\pi}{2I}(u-u_j))
$$

для вида собственных значений трансфер матрицы.

10. Покажите, что уравнение на нули собственных значений выглядит так:

$$
\prod_{j=1}^{2p}\theta_1(\frac{i\pi}{2I}(u-u_j))\theta_1(\frac{i\pi}{2I}(u-u_j+I')) = \left(\theta_4(\frac{i\pi}{2I})^{4p} + r\theta_1(\frac{i\pi}{2I})^{4p}\right)
$$

а сами нули u_j удовлетворяют уравнению

$$
(k\ sn(iu))^{2p} + r = 0
$$

и равны $(j = 1, 2, \ldots, 2p)$

$$
u_j = -\frac{1}{2}\gamma_j I' - i\phi_j\,,
$$

$$Am(\phi_j) = \begin{cases} \pi(j-1/2)/2p - \pi/2, if\ r = 1 \\ \pi j/2p\pi/2, if\ r = -1 \end{cases},$$

где амплитуда определена как

$$Am(\phi) = -i\log(ik^{1/2}sn(u - iI'/2)),$$

а различные выборы $\gamma_j = \pm 1, \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2p\}$ приводят к различным решениям. Более строгий и тонкий анализ приводит к необходимости выбросить одно решение из-за условия

$$\sum \gamma_j = 2p - 4 \times integer.$$

Это, вместе с выбором $r = \pm 1$, дает нам $2^{2p} = 2^n$ решений, соответствующих Λ_j.