

4-5. Свободные фермионы и преобразование Jordan-Wigner

Deadline March 22, 2019

Мы продолжаем рассматривать двумерную модель Изинга в нулевом магнитном поле с параметрами взаимодействия K, L . Матрицы, Очень простой метод диагонализации ряд-в-ряд трансфер матрицы - переход к свободным фермионам с помощью преобразования Йордана-Вигнера.

В случае $K \ll 1, L \gg 1$ ряд в ряд трансфер матрица определяется простым одномерным квантовым Гамильтонианом (модель Изинга в поперечном магнитном поле)

$$H = K \sum \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + L^* \sum \sigma_j^x$$

где

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Диагонализация такого оператора во многом проще, чем диагонализация трансфер матрицы для общих параметров K, L . Мы попробуем переписать Гамильтониан в терминах алгебры свободных фермионов $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, удовлетворяющих каноническим антикоммутиационным соотношениям вида

$$\{\psi_j^\dagger, \psi_k\} = \delta_{i,j}, \quad \{\psi_j, \psi_k\} = 0, \quad \{\psi_j^\dagger, \psi_k^\dagger\} = 0.$$

Заметим, что квадрат каждого такого оператора является 0

$$\psi_j^2 = 0, \quad \psi_j^{\dagger 2} = 0$$

Определим представление старшего веса, задав вакуумный вектор условием

$$\psi_j |vac\rangle = 0, j \in \{1, \dots, n\}$$

с нормировкой

$$\langle vac | vac \rangle = 1$$

Тогда пространство представлений с данным старшим вектором порождается действием операторов ψ^\dagger .

1. **Done in the class.** Покажите, что оператор $\psi_j^\dagger \psi_j$ является положительным эрмитовым оператором с собственными значениями $\{0, 1\}$. Покажите, что операторы $\psi_j^\dagger \psi_j$ и $\psi_i^\dagger \psi_i$ коммутируют, а поэтому можно найти их общие собственные векторы.

2. **Done in the class.** Покажите, что оператор ψ_j является оператором, понижающим собственное значение оператора числа частиц

$$N = \sum \psi_j^\dagger \psi_j,$$

на единицу, а оператор ψ_j^\dagger увеличивает собственное значение на единицу. Найдите собственные значения, скалярные произведения, общее число базисных векторов пространства представлений вида

$$|\psi\rangle = \psi_1^{\varepsilon_1} \dots \psi_n^{\varepsilon_n} |vac\rangle.$$

3. Для векторов вида ψ найдите собственные значения Гамильтониана свободных фермионов вида

$$H_{free} = \sum \epsilon_j \psi_j^\dagger \psi_j.$$

Рассмотрите квадратичный Гамильтониан немного более общего вида

$$H = \sum \epsilon_{j,k} \eta_j^\dagger \eta_k,$$

где η_k - операторы алгебры свободных фермионов. Попробуйте диагонализировать такой квадратичный оператор явно, сведя к H_{free} линейным преобразованием для каждой пары $(\eta_j, \eta_j^\dagger) \rightarrow (\psi_j, \psi_j^\dagger)$. Выпишите условия, которым такое линейное преобразование должно удовлетворять.

4. Рассмотрите операторы вида

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^- = \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Найдите алгебру (коммутационные соотношения) операторов σ^\pm, σ^z и покажите, что данные матрицы являются двумерным представлением алгебры $su(2)$. Как реализованы вектора такого представления? Вычислите явно соотношение

$$\exp(i\pi\sigma^+\sigma^-) = -\sigma^z.$$

Рассмотрите операторы, действующие нетривиально на i -ую компоненту в тензорном произведении двумерных представлений

$$\begin{aligned}\sigma_i^\pm &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^\pm \otimes \cdots \otimes 1 \\ \sigma_i^z &= 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^z \otimes \cdots \otimes 1.\end{aligned}$$

Используя предыдущие вычисления, напишите соотношения в алгебре таких операторов ((анти)коммутационные соотношения, выражения для квадратов операторов и т.д.).

5. Рассмотрите преобразование Йордана-Вигнера

$$\begin{aligned}C_j &= \left(e^{i\pi \sum_{i<j} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \right) \sigma_j^-, \\ C_j^+ &= \left(e^{-i\pi \sum_{i<j} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \right) \sigma_j^+.\end{aligned}$$

Покажите явным вычислением, что операторы C_j, C_j^\dagger удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям алгебры свободных фермионов.

6. Вычислите обратное преобразование между матрицами Паули и свободными фермионами. Покажите, что операторы в левой и правой частях удовлетворяют одинаковым коммутационным соотношениям и действуют на соответствующие вектора (своих) представлений одинаковым образом.

$$\begin{aligned}\sigma_j^+ &= \left(e^{i\pi \sum_{i<j} C_j^+ C_j} \right) C_j^+, \\ \sigma_j^- &= \left(e^{-i\pi \sum_{i<j} C_j^+ C_j} \right) C_j, \\ \sigma_j^z &= 1 - 2C_j^+ C_j.\end{aligned}$$

7. Из явного вида преобразования Йордана-Вигнера, покажите, что

$$\begin{aligned}\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- &= C_j^+ C_{j+1}, \\ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ &= C_j^+ C_{j+1}, \\ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- &= -C_j C_{j+1},\end{aligned}$$

8. Сделайте замену в Гамильтониане модели Изинга

$$\sigma^z \longrightarrow -\sigma^x, \sigma^x \longrightarrow \sigma^z, \sigma^y \longrightarrow \sigma^y.$$

Какому вращению в пространстве матриц Паули эта замена соответствует? После этой замены рассмотрите

$$H = K \sum \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + L^* \sum \sigma_j^z$$

и представьте его в терминах свободных фермионов C_j .

9. Используя предыдущее вычисление, сделайте преобразование Фурье

$$\eta_q = \frac{1}{n^{1/2}} e^{-i\pi/4} \sum_{j=-n}^{n-1} C_j e^{iqj}.$$

$q = 2\pi k/n$, предполагая для простоты, что n четное и выпишите Гамильтониан через новые переменные η_q . Для простоты игнорируйте граничные условия.

10. Попробуйте диагонализировать получившийся Гамильтониан, используя преобразование Боголюбова.

$$\begin{aligned}\psi_q &= \cos \phi_q \eta_q + \sin \phi_q \eta_{-q}, \\ \psi_{-q} &= \cos \phi_q \eta_{-q} - \sin \phi_q \eta_q,\end{aligned}$$

и привести Гамильтониан к виду

$$H = - \sum \epsilon_q \left(\psi_q^\dagger \psi_q - \frac{1}{2} \right).$$