Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

3 Уравнение звезда-треугольник

Deadline March 14, 2018

1. Закончите вычисление критической температуры в модели Изинга на треугольной решетке без магнитного поля и найдите T_c предполагая существование единственной критической точки в однородной модели.

2. Найдите T_c в Изинге без магнитного поля на однородной гексагональной решетке, предполагая существование единственной критической точки.

Коммутирующие трансфер матрицы

Мы хотим обсудить важные следствия уравнения звезда-треугольник (аналог уравнения Янга-Бакстера) для коммутации трансфер матриц в модели Изинга на квадратной решетке. Это позволит нам написать функциональные уравнения для собственных значений трансфер матриц и вычислить их явно.

Рассмотрите диагональ-диагональ трансфер матрицы в двумерной модели Изинга в нулевом магнитном поле, предполагая в них периодические граничные условия.

3. **(Done in the class)**. Запишите диагональ-диагональ матрицы $V(K,L)$ и $W(K,L)$, определив явно их матричные элементы $V_{\sigma',\sigma}(K,L)$ и $W_{\sigma''\sigma'}(K,L)$ между состояниями

$$\begin{aligned}\sigma &= \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}\,,\\ \sigma' &= \{\sigma'_1, \cdots, \sigma'_n\}\,,\\ \sigma'' &= \{\sigma''_1, \cdots, \sigma''_n\}\,.\end{aligned}$$

в терминах K, L. Выше использованы периодические граничные условия ,$\sigma_{n+1} = \sigma_1$, $\sigma''_{n+1} = \sigma''_1$. Мы считаем, что матрицы V, W действуют в пространстве спинов σ размерностью 2^n и принадлежат $Mat(2^n \times 2^n)$.

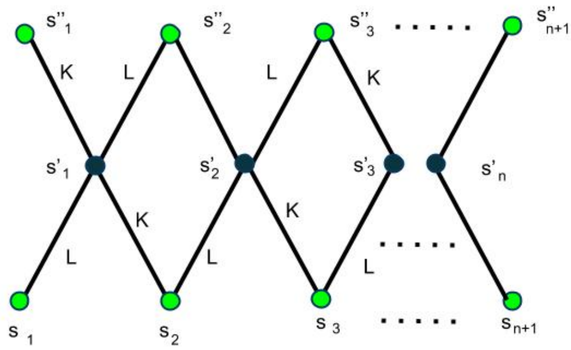

Fig. 1. Диагональ-диагональ трансфер матрцицы.

По смыслу, умножение на эти матрицы "присоединяют"к решетке целый диагональный ряд спинов. Они могут рассматриваться как некий оператор трансляции по решетке в вертикальном направлении.

Рассмотрите оператор сдвига $C \in Mat(2^n \times 2^n)$ в горизонтальном направлении, определив его как

$$C_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma'_1,\sigma_2}\delta_{\sigma'_2,\sigma_3}\cdots\delta_{\sigma'_n,\sigma_1}$$

Оператор C переводит спины с номерами $2, 3, \ldots, n, 1$ в $1, 2, \ldots, n$. Проверьте, что матрицы C коммутируют с диагональ-диагональ трансфер матрицами. Проверьте прямым вычислением, что

$$W = CV\,.$$

4. Из явного вида диагональ-диагональ трансфер матриц, покажите, что
$$V(K,L) = W(L,K)^T\,.$$

5. Введите оператор $R \in Mat(2^n \times 2^n)$ который меняет знак всех спинов σ_j в ряду на $-\sigma_j$. Запишите вид этого оператора при действии на σ. Покажите, что
$$V(K,L)R = V(-K,-L)\,,$$

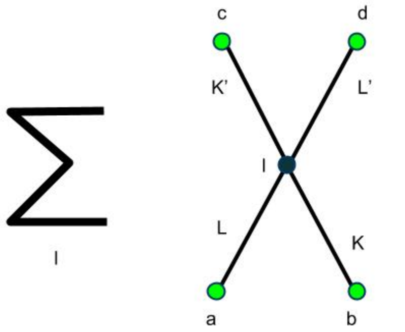

Fig. 2. Определение $X(a,b|c,d)$.

$$W(K,L)R = W(-K,-L)\,.$$

Покажите, что оператор R коммутирует с V и W.

6. **(Done in the class)**. Пусть связи в матрице $V(K,L)$ определяются коэффициентами (K,L) а в матрице $W(K',L')$ - коэффициентами (K',L'), как на рис. 1. Рассмотрите строительный блок $X(a,b|c,d)$ для произведения диагональ-диагональ трансфер матриц V,W (см. рис 2)
$$X(a,b|c,d) = \sum_{l=\pm 1} \exp(Lal + Kbl + K'lc + L'ld)$$
(по среднему спину l здесь проведено суммирование, так что получаем "статистическую сумму"фигуры, предполагая, что взяты фиксированные граничные условия). Зафиксируем все внешние спины и домножим этот элемент на e^{Mab}, получая статистическую суммы фигуры нарисованный на рисунке 3 слева.
$$e^{Mab}X(a,b|c,d)$$
Используя уравнение звезда-треугольник, проверьте, что по параметрам (K,L) можно подобрать параметры M,K',L' так, чтобы статистические суммы фигур справа и слева были равны для произвольных наборов спинов. Выпишите явно условия для M,K',L'.

7. **(Done in the class)**. Рассмотрите произведение двух диагональ-диагональ трансфер матриц в модели Изинга на квадратной решетке. Домножьте матрицы на простой фактор с параметром M

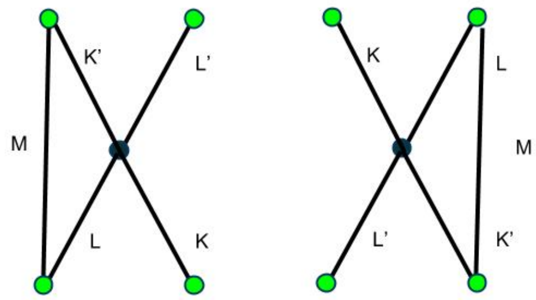

Fig. 3 Применение YBE

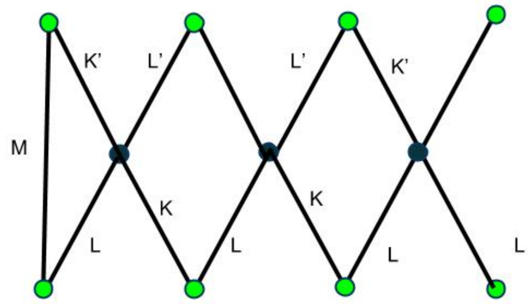

Fig. 4. Коммутация трансфер матриц с разными параметрами (K, L).

как на рисунке 2 и покажите, предполагая периодические граничные условия, что данные матрицы удовлетворяют удовлетворяют соотношению

$$W(K', L')V(K, L) = W(K, L)V(K', L')$$

если

$$\sinh(2K)\sinh(2L) = \sinh(2K')\sinh(2L') \,.$$

8. **(Done in the class)**. Соотношение из предыдущего упражнения означает коммутацию соответствуюших трансфер матриц. Например

$$[V(K, L), V(K', L')] = 0 \,.$$

Покажите это.

9. **(Done in the class)**. Попробуйте вывести соотношение обращения

$$W(L+\frac{i\pi}{2},-K)V(K,L) = (2i\sinh\ 2L)^n I + (-2i\sinh\ 2K)^n R$$

где $I = \delta(\sigma_1',\sigma_1)\cdots\delta(\sigma_n',\sigma_n)$.

(Начните с анализа произведения

$$X(a,b|c,d)$$

при таких конкретных параметрах K', L'. Затем попытайтесь понять, что это означает для произведения таких сомножителей: произведение трансфер матриц сведется к двум членам, соответствуюшим единичному оператору и оператору R. Если это ясно, то найти коэффициенты перед этими операторами).

Будут ли трансфер матрицы в LHS с такой раздвижкой параметров коммутировать друг с другом?

Напишите соответствующее функциональное уравнение на собственные значения трансфер матриц (например V). Это уравнение, с добавлением аналитических свойств позволит нам относительно легко решить двумерную модель Изинга.

10. **Не обязательно**. Операторная запись матриц.[1] Рассмотрим пространство спиновых переменных $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$. Размерность этого пространства 2^n. Его можно представлять как тензорное произведение $H = H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_n$, где H_i покрывается линейными комбинациями векторов

$$\text{spin up} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$\text{spin down} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Определим в таком тензорном произведении операторы вставки и обращения i-го спина

$$s_i = 1\otimes 1\cdots\otimes\sigma^{(z)}\otimes\cdots\otimes 1$$

[1] Мы не будем использовать в изучении модели Изинга данную запись, но она полезна как для изучения более сложных уравнений, так и для изучения брейдинга в конформных блоках, или в алгебрах вершинных операторов.

$$c_i = 1 \otimes 1 \cdots \otimes \sigma^{(x)} \otimes \cdots \otimes 1$$

Здесь матрицы $\sigma^{(z)}$ и $\sigma^{(x)}$ действуют только на i-ую компоненту и имеют вид

$$\sigma^{(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Используя эти обозначения, попробуйте записать ряд-в-ряд трансфер матрицу модели Изинга на квадратной решетке. [2]

ii) Введем операторы

$$U_{2j} = \exp(K s_j s_{j+1}) \,,$$
$$U_{2j-1} = \exp(L^* c_j) \,.$$

Рассмотрим три набор констант взаимодействия (K_i, L_i) $(i \in \{1,2,3\})$, удовлетворяющих соотношению

$$\sinh(2K_i)\sinh(2L_i), \;\; i \in \{1,2,3\}$$

Попробуйте записать уравнение звезда-треугольник в стандартном операторном виде

$$U_{i+1}(K_1, L_1)U_i(L_2, K_2)U_{i+1}(K_3, L_3) =$$
$$= U_i(K_3, L_3)U_{i+1}(L_2, K_2)U_i(K_1, L_1) \,.$$

и

$$U_i(K, L)U_j(K', L') = U_j(K', L')U_i(K, L) \quad for \; |i - j| \ge 2 \,.$$

Эти соотношения появляются и в более сложных интегририуемых моделях и в других областях математики (сравните, например, соотношения в группе кос).

[2]Один из вариантов - написать статистическую сумму с точностью до простого множителя в виде $Tr(V_2V_1)^m$ где $V_1 = \exp L^* \sum c_i$, $V_2 = \exp K \sum s_i s_{i+1}$.