Точно-решаемые модели
статистической механики *(2017)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

2 Дуальность Краммерса-Ванье.

Deadline March 1, 2018

Модель Изинга на треугольной и гексагональной решетке

Рассмотрите модель Изинга на регулярной треугольной решетке. Пусть в модели взаимодействия вдоль трех направлений задаются параметрами K_1, K_2, K_3, а соотвествующий больцмановский вес от элементарного треугольника, (для определеннсти - направленного вниз) задается как произведение соответствуюших экспонент $\exp K_j \sigma\sigma'$:

$$Z_N^{(3)} = \sum \exp\left(K_1 \sum \sigma_i \sigma_j + K_2 \sum \sigma_i \sigma_k + K_3 \sum \sigma_j \sigma_k\right) ,$$

Здесь спины, как и ранее, принимают значение ± 1, суммы в экспонентах со множителем K_j проводятся по всем ребрам решетки вдоль направления j.

Дуальная решетка будет в данном случае - решетка шестиугольников, гексагональная решетка. Пусть в ней взаимодействие вдоль трех различных направлений задается константами L_1, L_2, L_3

$$Z_{2N}^{(6)} = \sum \exp\left(L_1 \sum \sigma_i \sigma_j + L_2 \sum \sigma_i \sigma_k + L_3 \sum \sigma_j \sigma_k\right) ,$$

1. Вопросы.

   - Какое соответствие между числом узлов в треугольной решетке и дуальной к ней?

   - Позволяет ли дуальность KW в данном случае сделать предположение о критической температуре?

   - Какое гипотетическое дополнительное (к KW) преобразование желательно иметь в данном случае для того, чтобы найти критическую точку?

2. **(Done in the class)**. По аналогии с преобразованием Краммерса-Ванье для квадратной решетки, напишите низкотемпературное графическое разложение для треугольной решетки.

3. **(Done in the class)**. Напишите высокотемпературное графическое разложение для шестиугольной решетки.

4. **(Done in the class)**. Напишите соотношение между низко-температурным и высокотемпературным разложениями в этом случае - найдите связь между параметрами $\{K_j\}$ и параметрами $\{L_j\}$, такую, что суммы по многоугольникам (нетривиальная часть вычисления статсуммы) в обоих случаях были бы равны.

5. Проделайте предыдущие упражнения для никзотемпературного разложения для шестиугольной решетки и высокотемпературного разложения для треугольной решетки.

Параметр беспорядка. Дуальность KW для корреляторов

Определим неоднородную модель Изинга на квадратной решетке. Пусть, в самом общем виде, константы взаимодействия зависят от координат точек на решетке. Именно, рассмотрим элементарный квадрат решетки с координатами левого нижнего угла (k, j).

Занумеруем спины в узлах (j, k) как $\sigma_{j,k} = \pm 1$. Пусть коэффициенты взаимодействия на данном ребре определяются координатами середины ребра. Запишем формальную статистическую сумму в обычном виде, но с учетом этого усложнения

$$Z(\{K, L\}) = \sum_{\{\sigma_{jk}=\pm 1\}}$$
$$\exp \sum_{j,k} \left(K_{j+\frac{1}{2},k} \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k} + L_{j,k+\frac{1}{2}} \sigma_{j,k} \sigma_{j,k+1} \right)$$

Комментарий: мы не будем считать произвольную стат сумму такого наиболее общего вида: во всех ситуациях большинство коэффициентов будут равными и по горизонтали, и по вертикали. Такое усложненное обозначение позволяет записать явно определения важных операторов).

Определим двухточечную корреляционную функцию параметра беспорядка μ. Выберем незамкнутый путь Γ вдоль ребер дуальной решетки. Пусть j_1 - координата начала пути, а j_2 - координата конца пути (здесь и далее каждая точка, конечно, имеет две координаты, которые мы, для краткости называем одним символом

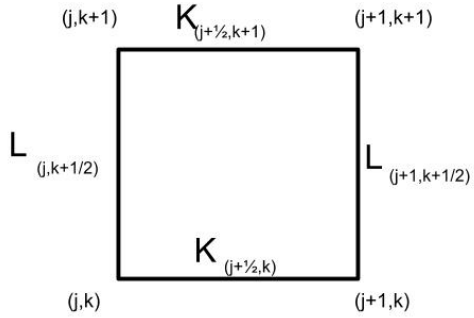

Рис. 1. Обозначения спинов и констант связи.

$j_1 \coloneqq \vec{j}_1 = \{j,k\}$). Построим неоднородную модель с набором констант связи $\{\tilde{K},\tilde{L}\}$, в которой все ребра, не пересекающие путь имеют равные константы связи K,L. А ребра, пересекаемые путем Γ - имеют константы связи $-K,-L$. Вдоль пути Γ спинам вдоль ребер энергетически выгоднее быть разными (предполагаем, что $K>0, L>0$). Другими словами, вдоль пути возникает блоховская доменная стенка.

$$\{\tilde{K}\} = \begin{cases} \;K \; out \; \Gamma \\ -K \; on \; \Gamma \end{cases}$$

$$\{\tilde{L}\} = \begin{cases} \;L \; out \; \Gamma \\ -L \; on \; \Gamma \end{cases}$$

Статистическая сумма $Z(\{\tilde{K},\tilde{L}\})$ такой неоднородной решетки, вообще говоря, будет отлична от статистической суммы $Z(\{K,L\})$ однородной решетки с константами взаимодействия K,L. Коррелятор двух параметров порядка, зависящий, по определению, от пути Γ определяется как

$$\langle \mu_{j_1}\mu_{j_2}\rangle_\Gamma = \frac{Z(\{\tilde{K},\tilde{L}\})}{Z(\{K,L\})}\,.$$

6. Фиксируйте координаты параметров беспорядка j_1, j_2 на двумерной плоскости. Проведите другой путь Γ' между этими двумя точками. Докажите, что двухточечная корреляционная функция не изменилась при деформации контура $\Gamma \;\to \Gamma'$.

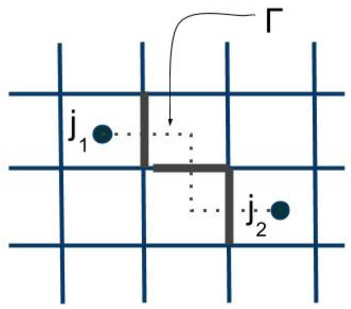

Рис. 2. Коррелятор операторов беспорядка.

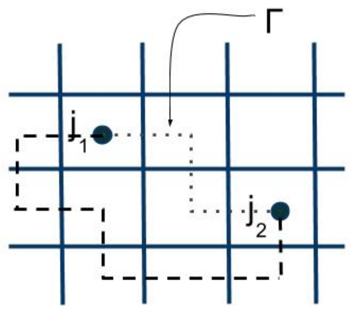

Рис. 3. Независимость от пути определения операторов беспорядка.

7. Вопросы.

   i) Идея введения параметра беспорядка состоит в том, чтобы найти оператор, дуальный по KW к спиновому оператору. В частности, хотелось бы, чтобы оператор беспорядка контролировал меру "беспорядка"в высокотемпературной фазе. Мы знаем, что в пределе низких темпрератур $\langle\sigma\rangle^2 \to 1$. Будем считать, что в пределе больших расстояний между точками $|j_1 - j_2| \to \infty$ двухточечная функция становится квадратом одноточечной:

$$\langle\mu\rangle^2 = \lim_{|j_1-j_2|\to\infty} \langle\mu_{j_1}\mu_{j_2}\rangle \,.$$

   Чему равна одноточечная функция параметра беспорядка в высокотемпературном пределе?

   ii) Корреляционные функции четного числа параметров беспорядка вводятся аналогично двухточечным. Нарисуйте пример 4 точечного коррелятора (с контурами). Есть ли зависимость таких корреляторов от формы контуров - если деформировать пути, или рисовать контура, как соединяющие разные точки?

8. Рассмотрите коррелятор, включающий операторы беспорядка μ и операторы порядка σ. Одно из важных понятий, который появится в скейлинговом пределе - в соответствующей двумерной конформной теории поля - взаимная локальность разных квантовых полей типа $\Phi_i(x)$:

$$\Phi_1(x)\Phi_2(ye^{2\pi i})|_\Gamma = e^{2\pi i\gamma_{12}}\Phi_1(x)\Phi_2(y)\,.$$

   Здесь γ_{12} - показатель взаимной локальности (число), а левая часть вычисляется путем аналитического продолжения вдоль контура, обходящего точку x по окружности.

   В решеточной теории примером некоммутативности операторов является появление нетривиального фазового сдвига, возникающего при обходе оператором беспорядка вокруг оператора порядка (или наоборот). Вычислите преобразование корреляционной функции

$$\langle\mu_{j_1}\sigma_{j_2}\cdots\rangle$$

   при обходе оператором μ вокруг спинового оператора (или наоборот).

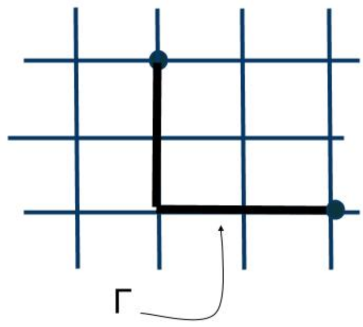

Рис. 4. Коррелятор спинов через пути.

9. Представление корреляторов спиновых операторов через пути на неоднородной решетке. Наша основная идея - показать, что спиновые корреляторы при преобразовании KW переходят в корреляторы операторов беспорядка. Для этого надо развить представление спиновых корреляторов через пути на неоднородной решетке. Рассмотрим путь Γ, лежащий на прямой решетке и соединяющий точки j_1 и j_2 на ней же. Пусть на ребрах вне пути все горизонтальные и вертикальные константы связи равны K, L соответственно. А вдоль пути пусть имеется сдвиг на $i\pi/2$:

$$\{K'\} = \begin{cases} K \; out \; \Gamma \\ K + \frac{i\pi}{2} \; on \; \Gamma \end{cases}$$

$$\{L'\} = \begin{cases} L \; out \; \Gamma \\ L + \frac{i\pi}{2} \; on \; \Gamma \end{cases}$$

Найдите связь между двухточечной корреляционной функцией спиновых операторов и величиной $Z\{K', L'\}/Z(\{, K, L\})$.

10. Преобразование KW. Для неоднородной решетки определим преобразование KW общего вида как

$$K^*_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} arcsinh(1/\sinh 2L_{j+1,k+\frac{1}{2}}))$$

$$L^*_{j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} arcsinh(1/\sinh 2K_{j+\frac{1}{2},k+1}))$$

Образуем функцию, которая совпадает со статистической суммой неоднородной модели, с точностью до простого множителя

$$Y(\{K,L\}) = Z(\{K,L\}) \left(2^N \prod_{j,k} \cosh 2K_{j+\frac{1}{2},k} \cosh 2L_{j,k+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Проверьте в ведущих порядках (скажем, первые два члена) дуальность Краммерса-Ваннье

$$Y(\{K^*,L^*\}) = Y(\{K,L\})$$

11. Дуальность KW для корреляторов. Используя предыдущие обозначения, проверьте, что

$$\langle \mu_{j_1}\mu_{j_2}\rangle = \frac{Y(\{\tilde{K},\tilde{L}\})}{Y(\{K,L\})}$$

$$\langle \sigma_{r_1}\sigma_{r_2}\rangle = \frac{Y(\{K',L'\})}{Y(\{K,L\})}$$

Примените преобразование KW и получите, что спиновый двухточечный коррелятор переходит после преобразования дуальности в коррелятор операторов беспорядка (при соответствующих выборах координат, путей).