Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

13-14. Анзатц Бете

Deadline May 20, 2018

Мы решаем задачу о даигонализации трансфер матриц путем использования коммутационных соотношений в алгебре операторов матриц монодромий

$$R_{12}(v-u)L_1(v)L_2(u) = L_2(u)L_1(v)R_{12}(v-u)\,.$$

1. **Done in the class**. Запишите коммутационные соотношения для L оператора
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_+^+ & L_+^- \\ L_-^+ & L_-^- \end{pmatrix}$$
явно. Элементы A, B, C, D являются не числами, а операторами, действуюшими на квантовом пространстве спиновых переменных
$$\mathcal{H} = \otimes_1^n C^2$$
и могут не коммутировать между собою.

   Рассмотрите возможные значения внешних индексов и найдите, что операторы $B(u)$ коммутируют при произвольных значениях спектральных параметров
$$B(v)B(u) = B(u)B(v)\,.$$
Это свойство важное для изучения векторов вида $B(v_1)\cdots B(v_l)\Psi_0$.

2. **Done in the class**. Проверьте явно из $RLL = LLR$ условия, что выполняются следующие соотношения
$$a(v-u)B(v)A(u) = A(u)B(v)b(v-u) + B(u)A(v)c(v-u)\,.$$

3. **Done in the class**. Проверьте явно из $RLL = LLR$ условия, что выполняются следующие соотношения
$$a(u-v)B(v)D(u) = D(u)B(v)b(u-v) + B(u)D(v)c(u-v)\,.$$

4. **Done in the class**. Рассмотрим вектор

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Напомним, что нам нужно диагонализвать трансфер матрицу, которая есть след матрицы монодромии по вспомогательному пространству

$$T = A(u) + D(u) .$$

   Найдите для цепочки длины n как действуют операторы $A(u)$ на векторе Ψ_0.

5. **Done in the class**. Найдите для цепочки длины n как действуют операторы $D(u)$ на векторе Ψ_0.

6. **Partially done in the class**. Рассмотрите вектор $\Phi = B(v_1)B(v_2)\Psi_0$. Попробуйте найти действие оператора $A(u) + D(u)$ на этот вектор. Выделите и выпишите диагональную часть, вектора вида $\varepsilon(u, v_1, v_2)(A(u)+ D(u))\Phi$. Выпишите явно нежелательные члены вида

$$\begin{aligned} &K_1(u, v_1, v_2)B(u)B(v_1)A(v_2) + K_2(u, v_1, v_2)B(u)B(v_2)A(v_1)+ \\ &+K_1'(u, v_1, v_2)B(u)B(v_1)D(v_2) + K_2'(u, v_1, v_2)B(u)B(v_2)D(v_1) \end{aligned}$$

   и проверьте, что условие зануления нежелательных членов приводит к уравнениям анзатца Бете с $l = 2$.

   Решение интегрального уравнения для основного состояния. Рассмотрим уравнения анзатца Бете

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + u_i\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} - u_i\right)} \right)^n = (-1)^{l-1} \prod_{j=1, j\neq i}^{l} \frac{\sin\left(\lambda + (u_i - u_j)\right)}{\sin\left(\lambda - (u_i - u_j)\right)}$$

   Введем обозначения

$$\begin{aligned} e^{i\theta(u_1-u_2)} &= -\frac{\sin\left(\lambda + i(u_1 - u_2)\right)}{\sin\left(\lambda - i(u_1 - u_2)\right)} , \quad \theta(0) = 0 , \\ e^{ik(u_j)} &= \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + iu_j\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} - iu_j\right)} . \end{aligned}$$

   Беря логарифмическую форму уравнений анзатца Бете

$$e^{ink(u_i)} = (-1)^{l-1} e^{i\sum_{j=1}^{l} \theta(v_i - v_j)}$$

мы имеем в непрерывном пределе для плотностей корней анзатца Бете

$$\rho(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(v_{i+1} - v_i)}$$

следующее интегральное уравнение для уравнения анзатца Бете для основного состояния

$$\frac{dk(v)}{dv} = 2\pi\rho(v) + \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{d\theta(v - v')}{dv}\rho(v')\,.$$

Используя преобразование Фурье,

$$\rho(v) = \int ds \rho_s e^{isv}$$

и зная фурье образы для известных функций $\frac{dk(v)}{dv}$ и $\frac{d\theta(v)}{dv}$, получаем, что в пределах верности используемых гиоптез, плотность корней равна

$$\rho_s = \frac{1}{4\pi \cosh \frac{\lambda}{2} s}$$

7. Найдите фурье образ k_s функции dk(v)/dv:

$$\frac{dk(v)}{dv} = \int ds\ k_s\ e^{isv}$$

и фурье образ θ_s функции

$$\frac{d\theta(v)}{dv} = \int ds\ \theta_s\ e^{isv}$$

8. Используя предыдущее вычисление найдите функцию $\rho(v)$.

9. Полная плотность корней анзатца Бете на решетке до взятия непрерывного предела нормирована как

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \rho(v) = \frac{l}{n}\,.$$

Вычислите интеграл зная точное выражение для плотности корней ρ для основного состояния. Найдите, какому же вектору (какому возбужденному состоянию над псевдовакуумом Ψ_0) с точностью до членов порядка $1 = (1/n)^0$ соответствует наше предписание для основного состояния (вопрос про l). Чему равен спин этого состояния?

10. Для нахождения свободной энергии на узел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Lambda(u)\,,$$

нам надо найти предел суммы двух членов

$$\log a(u) + \int dv \rho(v) \log \frac{a(iv - u + \frac{\lambda}{2})}{b(iv - u + \frac{\lambda}{2})}$$

и

$$\log b(u) + \int dv \rho(v) \log \frac{a(u - iv - \frac{\lambda}{2})}{b(u - iv - \frac{\lambda}{2})}$$

Вычислите оба члена и соответствующую свободную энергию на узел в шестивершинной модели для $|\Delta| < 1$.