Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

11. XXZ и координатный анзатц Бете

Deadline May 20, 2018

Рассмотрите Гамильтониан XXZ цепочки с периодическими граничными условиями.

$$H_{XXZ} = -\sum_{1}^{n} \left(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \frac{1}{2} \Delta (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - 1) \right) .$$

Оператор спина $S = \frac{1}{2} \sum \sigma^z$ коммутирует с Гамильтонианом, собственные вектора H_{XXZ} разбиваются на сектора с данным значением спина. Пусть псевдовакуум задается как

$$\Psi_0 = v^+ \otimes \cdots \otimes v^+, \quad v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ранее мы определили спектр возбуждений типа

$$\Psi_j = \sigma_j^- \Psi_0$$

и нашли собственные вектора $\Phi(k) = \sum_{j=1}^n a_j(k) \Psi_j$, удовлетворяющие соотношению

$$H_{XXZ} \Phi(k) = \varepsilon_k \ \Phi(k)$$

с собственными энергиями

$$\varepsilon_k = 2(\Delta - \cos k) , \quad k = \frac{2\pi}{n} j, \quad j = 0, 1, \dots n-1 .$$

В настоящем разделе мы начнем изучение более сложных возбуждений, спектр которых определяется уравнениями анзатца Бете. Рассмотрим возбуждения (двухмагнонного типа) над (псевдо)вакуумом со спином $\frac{n}{2} - 2$ вида

$$\Psi_{j_1 j_2} = \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- \Psi_0$$

Это вектора вида

$$\Psi_{j_1 j_2} = v^+ \otimes \cdots \otimes v^+ \otimes v^- \otimes v^+ \otimes \cdots v^+ \otimes v^- \otimes v^+ \cdots \otimes v^+ ,$$

где v^- стоят на j_1-ом и j_2-ом местах. Для поиска собственных векторов в данном секторе рассмотрим сумму

$$\Phi(k_1,k_2) = \sum a_{j_1 j_2}(k_1,k_2)\Psi_{j_1 j_2}\,.$$

Мы хотим, чтобы Гамильтониан цепочки действовал бы на эти вектора по правилу

$$H_{XXZ}\Phi(k_1,k_2) = \varepsilon(k_1,k_2)\Phi(k_1,k_2)\,.$$

1. **Done in the class**. Найдите действие оператора H_{XXZ} на состояния

   $$\Psi_{j_1 j_2} = \sigma^-_{j_1}\sigma^-_{j_2}\Psi_0$$

   с $j_1+1<j_2$. Вы должны получить

   $$H_{XXZ}\Psi_{j_1 j_2} = -\left(\Psi_{j_1+1,j_2} + \Psi_{j_1-1,j_2} + \Psi_{j_1,j_2+1} + \Psi_{j_1,j_2-1} - 4\Delta\Psi_{j_1,j_2}\right)\,.$$

2. **Done in the class**. Найдите действие оператора H_{XXZ} на состояния

   $$\Psi_{j,j+1} = \sigma^-_{j}\sigma^-_{j+1}\Psi_0\,.$$

   Вы должны получить

   $$H_{XXZ}\Psi_{j,j+1} = -\left(\Psi_{j,j+2} + \Psi_{j-1,j+1} - 2\Delta\Psi_{j,j+1}\right)\,.$$

3. **Partially done in the class**. Произведите пересуммирование и проверьте, что

   $$\begin{aligned}&H_{XXZ}\Phi = \\ &-\sum_{j_1+1<j_2}\left(a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j2} + a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j_2-1} + a_{j_1,j_2+1} - 4\Delta a_{j_1,j_2}\right)\Psi_{j_1,j_2} - \\ &-\sum_j\left(a_{j-1,j+1} + a_{j,j+2} - 2\Delta a_{j,j+1}\right)\Psi_{j,j+1}\,.\end{aligned}$$

4. Рассмотрите анзатц Бете

   $$a_{j_1 j_2} = A_{12}(k_1,k_2)e^{ij_1k_1+ij_2k_2} + A_{21}(k_1,k_2)e^{ij_1k_2+ij_2k_1}\,,$$

   где коэффициенты A_{12}, A_{21} зависят лишь от импульсов k_1, k_2, но не зависят от координат j_1, j_2. Проверьте, что

   $$-\sum_{j_1+1<j_2}\left(a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j2} + a_{j_1+1,j_2} + a_{j_1,j_2-1} + a_{j_1,j_2+1} - 4\Delta a_{j_1,j_2}\right)\Psi_{j_1,j_2} =$$

$$= (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}) \sum_{j_1+1<j_2} a_{j_1 j_2} \Psi_{j_1 j_2} \,,$$

где ϵ_k - энергии одночастичных возбуждений. Рассмотрите условие

$$-\sum_j \left(a_{j-1,j+1} + a_{j,j+2} - 2\Delta a_{j,j+1}\right) \Psi_{j,j+1} = (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}) \sum_j a_{j,j+1} \Psi_{j,j+1} \,,$$

Используя явный вид для ε_k, найдите, что коэффициенты A_{12}, A_{21} должны удовлетворять соотношению

$$S(k_1, k_2) = \frac{A_{12}(k_1, k_2)}{A_{21}(k_1, k_2)} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2}} \,.$$

5. Наложите граничное условие на спины в узлах 1 и $n+1$. Выпишите соответсвенные граничные условия для коэффициентов $a_{j_1 j_2}$. Выведите уравнения анзатца Бете для данного случая

$$S(k_1, k_2) e^{ik_2 n} = 1 \,,$$
$$S(k_2, k_1) e^{ik_1 n} = 1 \,.$$

6. Вообще говоря, уравнения анзатца Бете сложны для аналитического решения. Тем не менее, попробуйте поизучать эти уравнения, пытаясь найти хотя бы какие-нибудь простые решения (например, рассматривая простые случаи - малых n, специальных значений параметров Δ).

7. Проверьте, что матрица рассеяния (псевдо) частиц удовлетворяет свойству

$$S(k_1, k_2) S(k_2, k_1) = 1 \,.$$

Введите тригонометрическую параметризацию для импульсов, переходя к быстротным переменным

$$k_1 = k(u_1) \,, \quad k_2 = k(u_2) \,, \Delta = -\cos\lambda \,,$$
$$e^{ik(u)} = \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + iu\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} - iu\right)} \,.$$

Проверьте, что матрица рассеяния (квази)частиц имеет вид

$$S(k_1, k_2) = -\frac{\sin\left(\lambda + i(u_1 - u_2)\right)}{\sin\left(\lambda - i(u_1 - u_2)\right)}$$

Выпишите уравнения анзатца Бете в этой параметризации.

8. Рассмотрите сектор со спином $\frac{n}{2} - 3$ и возбуждения вида

$$\Psi_{j_1 j_2 j_3} = \sigma^-_{j_1} \sigma^-_{j_2} \sigma^-_{j_3} \Psi_0 \,.$$

Пусть волновая функция Бете

$$\Phi(k_1, k_2, k_3) = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} a_{j_1 j_2 j_3} \Psi_{j_1, j_2, j_3} \,,$$

определена фиксированием коэффциентов $a_{j_1 j_2 j_3}$ как

$$\begin{aligned}
&a_{j_1 j_2 j_3} = e^{i(j_1 k_1 + j_2 k_2 + j_3 k_3)} + S_{12} e^{i(j_1 k_2 + j_2 k_1 + j_3 k_3)} + S_{23} e^{i(j_1 k_1 + j_2 k_3 + j_3 k_2)} + \\
&+ S_{12} S_{13} e^{i(j_1 k_2 + j_2 k_3 + j_3 k_1)} + S_{13} S_{23} e^{i(j_1 k_3 + j_2 k_1 + j_3 k_2)} + \\
&+ S_{12} S_{13} S_{23} e^{i(j_1 k_3 + j_2 k_2 + j_3 k_1)} \,, \\
&S_{ij} := S(k_i, k_j) \,.
\end{aligned}$$

Попробуйте наложить периодические граничные условия и выписать уравнения анзатца Бете для квази-импульсов в этом случае.

9. Вопрос. Попробуйте применить преобразование Йордана-Вигнера к XXZ цепочке. Какие трудности по сравнению с моделью Изинга появляются в данном примере?

10. (Not necessary: additional). Предел к XXX. Рассмотрите случаи $\Delta = 1$, сделав рейскейлинг и совершив предел

$$\lambda \to \pi - \delta, \;\; u \to u\delta, \;\; \delta \to 0$$

Выпишите уравнения анзатца Бете в этом пределе (чтобы просто посмотреть на вид уравнений для XXX цепочки). Найдите выражения для энергий в этой параметризации.

Попробуйте получить соответствующие уравнения для случая $\Delta = -1$.