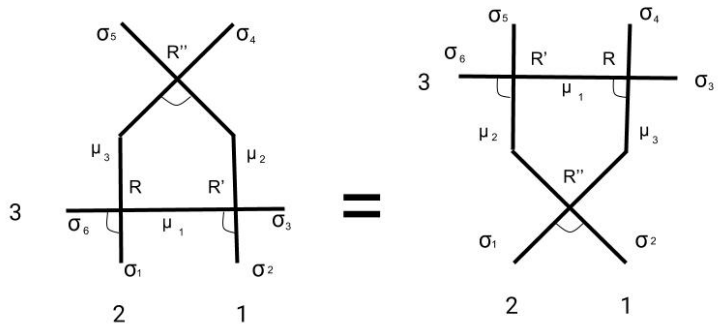

Fig. 1. YBE

Точно-решаемые модели
статистической механики *(2018)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

10. Шести вершинная модель и XXZ.

Deadline May 20, 2018

Уравнение Янга-Бакстера имеет вид представленный на рисунке 1. В компонентах мы имеем

$$\sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R''^{\sigma_5\sigma_4}_{\mu_2\mu_3} R'^{\mu_2\sigma_3}_{\sigma_2\mu_1} R^{\mu_3\mu_1}_{\sigma_1\sigma_6} = \sum_{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\pm} R^{\sigma_4\sigma_3}_{\mu_3\mu_1} R'^{\sigma_5\mu_1}_{\mu_2\sigma_6} R''^{\mu_2\mu_3}_{\sigma_2\sigma_1}.$$

Это уравнение должно выполняться при выборе всех возможных комбинаций для внешних спинов $\sigma_1,\ldots,\sigma_6$. Всего есть 2^6 нелинейных уравнений. Для шестивершинной модели число уравнений будет меньшим, как и их структура будет проще.

1. Мы рассматриваем шестивершинную модель, с параметризацией

$$R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

и схожей параметризацией для R, R': матрица R' зависит от параметров a', b', c', а матрица R'' зависит от параметров a'', b'', c''.

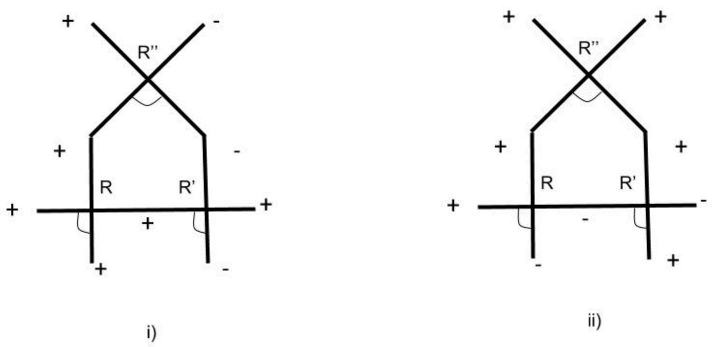

Fig. 2. LHS of YBE, giving non-trivial equation for 6 vertex model

Рассмотрите уравнение Янга-Бакстера для случая, когда внешние спины выбраны как на части i) рисунка 2. Выпишите соответствующее уравнение для весов $(a, b, c, a', ...)$.

2. Повторите упражнение выше для случая ii)

3. Дополните полученные в предыдущих упражнениях уравнения еще одним, полученным на занятии. Вы должны получить систему

$$
\begin{aligned}
&-ac'a'' + bc'b'' + ca'c'' = 0\,, \\
&cc'b'' + (ba' - ab')c'' = 0\,, \\
&-cb'a'' + ca'b'' + bc'c'' = 0\,.
\end{aligned}
$$

Проверьте, что условие существования a'', b'', c'' можно записать как

$$
\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'} = \Delta\,.
$$

4. Рассмотрите параметризацию в терминах целых функций.

$$
\begin{aligned}
&a(u|\lambda) = \sin(\lambda - u)\,, \\
&b(u|\lambda) = \sin(u)\,, \\
&c(u|\lambda,) = \sin(\lambda)\,.
\end{aligned}
$$

и соответствующие выражения через u', u'' для R, R'. Найдите Δ через λ. Рассмотрите уравнение Янга-Бакстера для матриц R, R', R'' с одинаковым значением λ и найдите связь между спектральными параметрамми u, u', u''.

5. Для шестивершинной модели проверьте явно условия кроссинга и унитарности
$$R^{\sigma_3\sigma_4}_{\sigma_1\sigma_2}(\lambda - u) = R^{\sigma_2 - \sigma_3}_{\sigma_4 - \sigma_1}(u)\,,$$
$$R_{12}(u)R_{21}(-u) = a(u)a(-u)\,.$$

6. Рассмотрите алгебру L-операторов для шестивершинной модели.
$$R_{12}(u_1 - u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2)\,,$$
Рассмотрите произведение трех операторов
$$L_1(u_1)L_2(u_2)L_3(u_3)$$
Используя соотношения в квадратичной алгебре, попробуйте переписать этот элемент через
$$L_3(u_3)L_2(u_2)L_1(u_1)$$
Сделать это можно двумя способами. Коммутируя операторы 1 с 2, а потом с 3. Или коммутируя 2 и 3, а потом 1. Будет ли результат зависеть от порядка коммутации (является ли алгебра ассоциативной?).

7. Покажите, что оператор $R_{ij}(0)$ является с точностью до константы оператором перестановки P_{ij}.

8. Найдите явно вид оператора $T(0)$ (и $T^{-1}(0)$) при действии на вектора $v \in \mathcal{H}$. (Вы должны получить оператор сдвига $\sigma_j \to \sigma_{j+1}$).

9. Рассмотрите разложение трансфер матрицы модели по степеням спектрального параметра
$$T^{-1}(0)T(u) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} H_j u^j\,.$$
Найдите оператор H_1 и сравните результат с Гамильтонианом XXZ цепочки. Подумайте над видом следующего Гамильтониана в данном разложении.

10. Рассмотрите Гамильтониан XXZ цепочки.
$$H_{XXZ} = -\sum_{1}^{n}\left(\sigma^x_j\sigma^x_{j+1} + \sigma^y_j\sigma^y_{j+1} + \Delta(\sigma^z_j\sigma^z_{j+1} - 1)\right)\,.$$

Покажите, что оператор спина $S = \sum \sigma^z$ коммутирует с Гамильтонианом, и, таким образом, собственные вектора разбиваются на сектора с данным значением спина. Рассмотрите вакуумный вектор

$$\Psi_0 = v^+ \otimes \cdots \otimes v^+, \quad v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите действие H_{XXZ} на векторах типа

$$|j\rangle = \sigma_j^- \Psi_0$$

Для одночастичных возбуждений, соответствующих квазичастицам, мы ищем собственные вектора в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} a_j |j\rangle$$

Решите проблему на собственные значения (найдите коэффициэнты a_j)

$$H_{XXZ} \Phi = \varepsilon \ \Phi$$

и найдите соответствующие энергии ε одночастичных возбуждений XXZ цепочки в случае периодических граничных условий.