Точно-решаемые модели
статистической механики *(2017)*

Пугай Я.П. ИТФ РАН

1 Основные определения

Deadline May 1, 2018

Обобщенная модель Изинга.

Рассмотрим модель Изинга общего вида. Пусть на решетке из N узлов переменные ассоциированы с узлами принимают значения $\sigma = \pm 1$. Состояние системы определяется набором $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$, а энергия состояния задается как $E(\sigma)$. Определим статистическую сумму Z_N, свободную энергию F_N и ожидаемое значение оператора X (со значением $X(\sigma)$ в состоянии σ) как

$$
\begin{aligned}
&Z_N = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right) , \\
&F_N = -kT \log Z_N , \\
&\langle X \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} X(s) \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right) ,
\end{aligned}
$$

1. **(Done in the class)**. Проверьте, что внутренняя энергия $\langle E \rangle$, среднее от оператора со значением $E(\sigma)$ в состоянии σ удовлетворяет стандартным термодинамическим соотношениям

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \log Z_N , \\
\langle E \rangle &= -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F_N}{T}\right) .
\end{aligned}
$$

2. **(Done in the class)**. Пусть сейчас и далее в этом разделе

$$E(\sigma) = E_{int}(\sigma) - H \sum \sigma_i$$

где H - магнитное поле и предполагается, что вещественная функция $E_{int}(\sigma)$, описывающая взаимодействие между узлами, является четной функцией $E_{int}(\sigma) = E_{int}(-\sigma)$.

Проверить, что намагниченность на узел $M(H,T)$ выражается как

$$M(H,T) = -\frac{\partial}{\partial H} f(H,T) = \frac{1}{N}\langle\mathcal{M}\rangle\,.$$

Здесь $f(H,T) = \frac{1}{N}F_N(H,T)$ - свободная энергия на узел и $\mathcal{M} = \sum\sigma_i$.

3. **(Done in the class)**. Проверить, что при фиксированной температуре T намагниченность является ограниченной, нечетной,

$$\begin{aligned} &-1 \le M(H,T) \le 1\,,\\ &M(H,T) = -M(-H,T) \end{aligned}$$

и неубывающей функцией

$$\chi(H,T) = \frac{\partial}{\partial H} M(H,T) \ge 0$$

от магнитного поля H. В частности, найти, что восприимчивость χ выражается через среднее от оператора $\mathcal{M} = \sum\sigma_i$ как

$$\chi(H,T) = -\frac{\partial}{\partial H} M(H,T) = \frac{1}{NkT}\langle(\mathcal{M} - \langle\mathcal{M}\rangle)^2\rangle\,.$$

4. **(Done in the class)**. Пример скейлингового соотнощения. Рассмотрим гипотезу (Grifiths, 1967) о виде скейлингового соотношения связывающего магнитное поле и намагниченность

$$H/kT_c = M|M|^{\delta-1} h\left(\frac{t}{|M|^{1/\beta}}\right)$$

вблизи критической точки типичного ферромагнетика $H = 0, T = T_c$.

Переменная $t = \frac{T-T_c}{T_c}$ соответствует температурной переменной, определяющей отклонение от критичности (в нулевом поле). Найдите вид скейлингового преобразования H при растяжении масштаба $t \to \lambda t$.

Скейлинговая функция $h(x)$ имеет типичный вид, показанный на рисунке.

Исходя из вида $h(x)$ покажите, что β и δ соответсвуют критическим показателям намагниченности

$$M(0,T) \sim (-t)^\beta, \quad t \to 0^-\,,$$

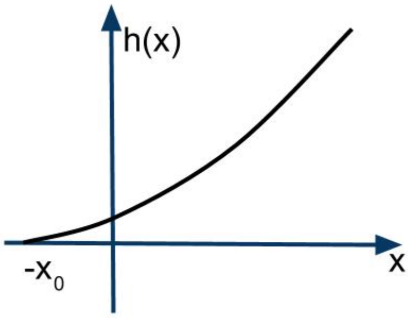

Рис. 1. Типичная функция $h(x)$

$$M(H, T_c) \sim H^{1/\delta}, \quad H \to 0\,.$$

Выведите скейлинговое соотношение

$$\gamma' = \beta(\delta - 1)$$

между критическими показателями β, δ и показателем γ' для восприимчивости

$$\chi(0, T) \sim (-t)^{-\gamma'}, \quad t \to 0^-\,.$$

Одномерная модель Изинга

Рассмотрим одномерную модель Изинга.

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \exp\left(K \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right),$$

на окружности $\sigma_{N+1} = \sigma_1$.

5. **(Done in the class)**. Трансфер матрица. Запишите статистическую сумму в виде

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} V_{\sigma_1, \sigma_2} V_{\sigma_1, \sigma_2} \cdots V_{\sigma_N, \sigma_1}$$

где $V_{\sigma,\sigma'} = V_{\sigma',\sigma}$. Введите матрицу $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ V_{-+} & V_{--} \end{pmatrix}$$

и покажите, что статистическая сумма в одномерной случае может быть записана в виде

$$Z_N = Tr\mathbf{V}^N$$

6. **(Done in the class)**. Точная статистическая сумма 1d модели Изинга. Диагонализуйте трансфер матрицу $\mathbf{V}$. Найдите явно след для статистической суммы. Найдите в термодинамическом пределе явное выражение для свободной энергии на узел решетки.

7. **(Done in the class)**. Намагниченность. Запишите выражение для намагниченности на узел решетки. Покажите, что выражение для одноточечной корреляционной функции, среднего значения спина, можно представить в виде следа

$$M = \langle \sigma_j \rangle = Tr\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathbf{N}}$$

где матрица $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите явно намагниченность в термодинамичеком пределе.

8. Вопрос. Сравните явное вычисление намагниченности из предыдущего упражнения и выражением, полученным путем дифференцирования свободной энергии по магнитному полю. Совпали ли ответы?

9. **(Done in the class)**. Двухточечная корреляционная функция. Запишите двухточечный коррелятор

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$$

в виде следа произведений матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{V}$. Покажите, что связная корреляционная функция

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

зависит от расстояния $i-j$ между узлами решетки, но не от индивидуальных i и j. В термодинамическом пределе (устремляя $N \to \infty$, но сохраняя расстояние $i - j$ фиксированным), найдите эту корреляционную функцию точно.

10. Проанализируйте свойства связного коррелятора как функции от расстояния для положительных температур T и вещественного магнитного поля H (здесь $K = J/kT,\ h = H/kT$). В общей модели Изинга ожидается, что коррелятор

$$g_{ij} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

спадает экспоненциально с расстоянием, в данном случае $x = |i - j|$. Так ли это в данном случае? Что является аналогом корреляционной длины ξ, определяемой в общем случае для коррелятора $g_{ij} = g(r_{ij})$ как

$$g(x\vec{k}) \sim x^{-d+2-\eta} \exp(-x/\xi)$$

где d - размерность, η-некоторое число, а $\vec{k}$ - единичный вектор, определяющий направление от точки i к точке j.

Одним из признаков критической точки являются бесконечные корреляции, т.е. расходимость корреляционной длины. Есть ли в одномерной модели Изинга такая расходимость?

Как себя ведет спиновый коррелятор и чему равно значение η в такой точке?